

PHẦN I: TĨNH HỌC

Tĩnh học là phần nghiên cứu trạng thái cân bằng của vật rắn (vật rắn tuyệt đối) dưới tác dụng của các lực. Hay nói cách khác tĩnh học là phần nghiên cứu về lực và điều kiện để vật rắn cân bằng dưới tác dụng của các lực.

Có hai bài toán cơ bản cần được nghiên cứu trong phần này là:

- Thu gọn một hệ lực: Là biến đổi hệ lực tác dụng lên vật thành một hệ lực đơn giản hơn.
- Tìm điều kiện cân bằng: Là thiết lập các điều kiện đối với hệ lực mà dưới tác dụng của nó vật rắn cân bằng.

Để giải quyết hai bài toán này, trong tĩnh học người ta sử dụng phương pháp tiên đề, là phương pháp dựa trên các khái niệm cơ bản và hệ tiên đề, nhờ các suy diễn logic để tìm các quy luật của các đối tượng được nghiên cứu.

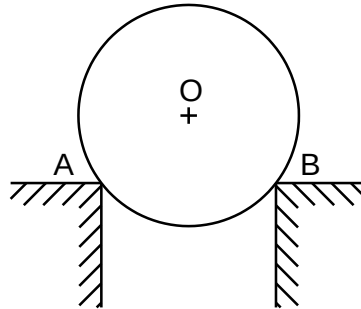
Các khái niệm cơ bản là những khái niệm nền tảng đầu tiên để xây dựng nội dung môn học, còn các tiên đề là những mệnh đề công nhận các tính chất của các khái niệm cơ bản.

Chương 1 CƠ SỞ CỦA TĨNH HỌC

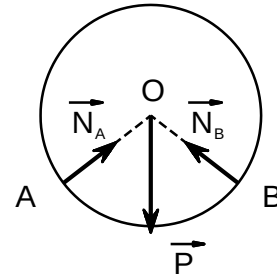
A. CÁC VÍ DỤ

1) Ví dụ 1

Một nồi hơi có trọng lượng P được đặt trên hai gối đỡ A và B như hình vẽ. Hãy xác định hệ lực tác dụng lên nồi hơi?



(Hình a)



(Hình b)

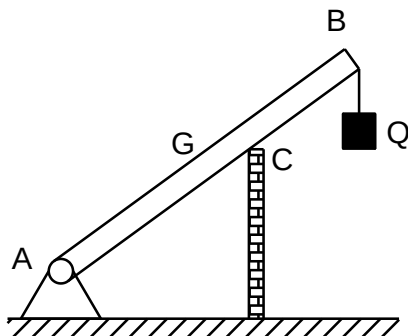
Bài giải

- Chọn vật khảo sát: nồi hơi
- Giải phóng nồi hơi khỏi các mối liên kết: liên kết tựa tại A và B, thay vào đó bằng các phản lực liên kết tương ứng $\vec{N}_A, \vec{N}_B$ (hình b)
- Các lực tác dụng lên nồi hơi gồm:
 - + Lực đã cho: trọng lực $\vec{P}$
 - + Các phản lực liên kết: $\vec{N}_A, \vec{N}_B$
- Vậy hệ lực cân bằng tác dụng lên nồi hơi sau khi đã giải phóng liên kết là:

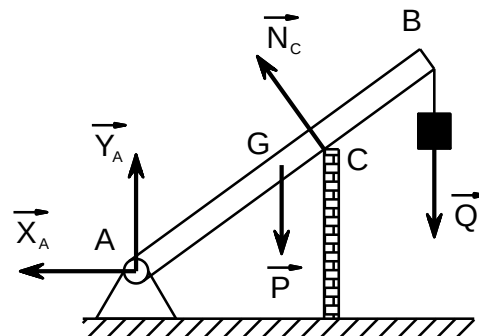
$$(\vec{P}, \vec{N}_A, \vec{N}_B) \sim 0$$

2) Ví dụ 2

Một thanh AB có trọng lượng P được bắt bản lề cố định tại A và tì lên bức tường có chiều cao h tại C. Đầu B treo vật nặng có trọng lượng Q . Hãy tìm hệ lực tác dụng lên thanh AB?



(Hình a)



(Hình b)

Bài giải

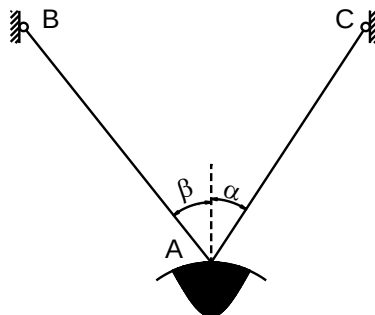
- Chọn thanh AB làm vật khảo sát
- Giải phóng thanh AB khỏi các mối liên kết: liên kết bản lề tại A, liên kết tựa tại C và thay vào đó bằng các phản lực liên kết tương ứng $\vec{X}_A, \vec{X}_B, \vec{N}_C$ (hình b)
- Các lực thật sự tác dụng lên AB gồm:
 - + Lực đã cho: $\vec{P}, \vec{Q}$
 - + Các phản lực liên kết: $\vec{X}_A, \vec{X}_B, \vec{N}_C$
- Vậy hệ lực cân bằng tác dụng lên vật rắn sau khi đã giải phóng khỏi các mối liên kết là: $(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{X}_B, \vec{N}_C) \sim 0$

Chú ý: Để đơn giản bài toán, ta có thể biểu diễn các phản lực liên kết trực tiếp trên hình vẽ mà không cần phải thêm bước vẽ tách vật khảo sát khỏi các mối liên kết.

B. BÀI TẬP ỨNG DỤNG

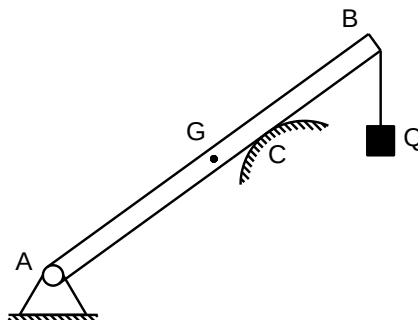
1) Bài tập 1

Một bóng đèn có trọng lượng P được treo vào tường nhờ các dây AB và AC nghiêng so với phương thẳng đứng các góc α, β như hình vẽ. Hãy xác định hệ lực tác dụng lên bóng đèn?



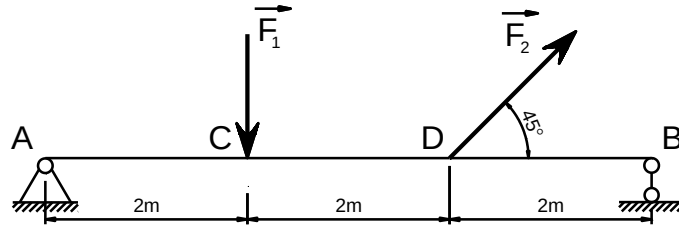
2) Bài tập 2

Thanh đồng chất AB có trọng lượng P tựa lên mặt cầu nhẵn tại C. Đầu A được bắt xuống nền nhờ bản lề cố định, đầu B treo vật nặng có trọng lượng Q. Hãy xác định hệ lực tác dụng lên thanh AB?



3) Bài tập 3

Cho dầm AB có trọng lượng P tựa trên bản lề cố định tại A, bản lề di động tại B chịu tác dụng của các lực $\vec{F}_1$ đặt tại C, $\vec{F}_2$ đặt tại D như hình vẽ. Hãy xác định hệ lực tác dụng lên dầm?



Chương 2

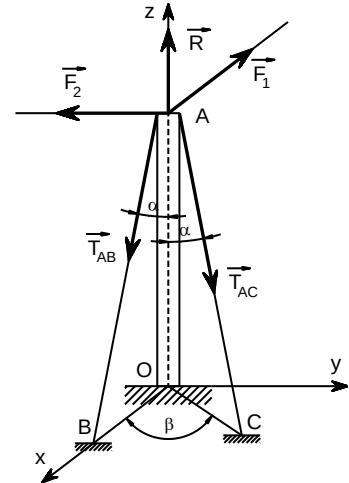
THU GỌN HỆ LỰC VÀ ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC

A. CÁC VÍ DỤ

I. Các ví dụ phân hệ lực không gian

1) Ví dụ 1 – Về hệ lực không gian đồng quy

Cột OA thẳng đứng được giữ nhờ hai dây AB và AC tạo với cột góc $\alpha = 30^\circ$, góc giữa hai mặt phẳng (OAB) và (OAC) là $\beta = 60^\circ$. Tại đầu A của cột buộc hai dây vuông góc với nhau và song song với các trục Ox, Oy. Biết lực kéo mỗi dây $F_1 = F_2 = F = 200(N)$. Tìm áp lực thẳng đứng của cột lên nền và sức căng các dây AB, AC? Bỏ qua trọng lượng cột và hai dây.



Bài giải

- Nhận xét: Đây là bài toán hệ lực không gian đồng quy tại nút A.
- Chọn vật khảo sát: Khảo sát nút A cân bằng.
- Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.
- Giải phóng nút A khỏi các mối liên kết: Phản lực liên kết dây AB và BC là $\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC}$, phản lực liên kết tựa của cột OA lên nền là $\vec{R}$.
- Khi đó, nút A chịu tác dụng của hệ lực không gian đồng quy gồm các lực như sau:

+ Các phản lực liên kết: $\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC}, \vec{R}$

+ Các lực đã cho: $\vec{F}_1, \vec{F}_2$

- Vậy hệ lực cân bằng tác dụng lên thanh OA là: $(\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC}, \vec{R}, \vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0$
- Áp dụng điều kiện cân bằng cho hệ lực không gian đồng quy:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = T_{AB} \cdot \sin \alpha + T_{AC} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta - F_1 = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = T_{BC} \cdot \sin \alpha \sin \beta - F_2 = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} = R - T_{AB} \cdot \cos \alpha - T_{BC} \cdot \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình trên ta thu được

$$\begin{cases} T_{AB} = \frac{F}{\sin \alpha} (1 - \cot g \beta) \\ T_{AC} = \frac{F}{\sin \alpha \sin \beta} \\ R = F \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) \cot g \alpha \end{cases}$$

- Thay số tính được

$$\begin{cases} T_{AB} = 172(N) > 0 \\ T_{AC} = 461(N) > 0 \\ R = 546(N) > 0 \end{cases}$$

- Kết luận: $\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC}, \vec{R}$ có chiều như hình vẽ

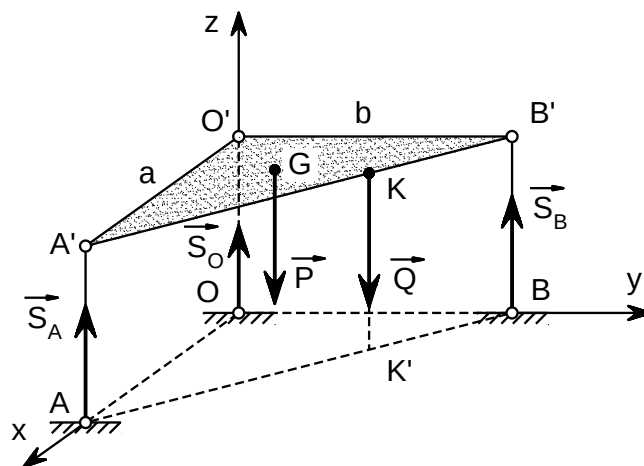
- Vậy áp lực thẳng đứng lên cột là $\vec{R}' = -\vec{R}$

- Và sức căng các dây AB, AC tương ứng là:

$$\begin{cases} \vec{T}'_{AB} = -\vec{T}_{AB} \\ \vec{T}'_{AC} = -\vec{T}_{AC} \end{cases}$$

2) Ví dụ 2 – Về hệ lực không gian song song

Một tấm hình tam giác vuông đồng chất $O'A'B'$ có trọng lượng $P = 120(N)$ được giữ nằm ngang bởi ba thanh thẳng đứng OO', AA', BB' có trọng lượng không đáng kể. Tại điểm K' đặt vật nặng có trọng lượng $Q = 240(N)$. Hãy xác định ứng lực trong các thanh, biết $B'K' = \frac{1}{4} A'B'$



Bài giải

- Nhận xét: Đây là bài toán hệ lực không gian song song

- Chọn vật khảo sát: Khảo sát sự cân bằng của tấm $O'A'B'$
- Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có mặt phẳng Oxy song song với mặt phẳng $O'A'B'$ như hình vẽ
- Giải phóng tấm $O'A'B'$ khỏi các mối liên kết thanh OO', AA', BB' và thay vào đó bằng các phản lực liên kết tương ứng $\vec{S}_A, \vec{S}_B, \vec{S}_O$.
- Khi đó, tấm $O'A'B'$ chịu tác dụng của hệ lực không gian song song gồm các lực như sau:
 - + Các phản lực liên kết: $\vec{S}_A, \vec{S}_B, \vec{S}_O$
 - + Các lực đã cho: $\vec{P}, \vec{Q}$
- Vậy hệ lực cân bằng tác dụng lên dầm AB là: $(\vec{S}_A, \vec{S}_B, \vec{S}_O, \vec{P}, \vec{Q}) \sim 0$
- Áp dụng điều kiện cân bằng dạng cho hệ lực không gian song song:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 F_{iz} = S_A + S_B + S_O - P - Q = 0 \\ \sum_{i=1}^5 m_{Ox}(\vec{F}_i) = S_B \cdot b - P \frac{b}{3} - Q \frac{3b}{4} = 0 \\ \sum_{i=1}^5 m_{Oy}(\vec{F}_i) = P \frac{a}{3} + Q \frac{a}{4} - S_A \cdot a = 0 \end{cases}$$

- Thay số, giải hệ phương trình trên ta được:

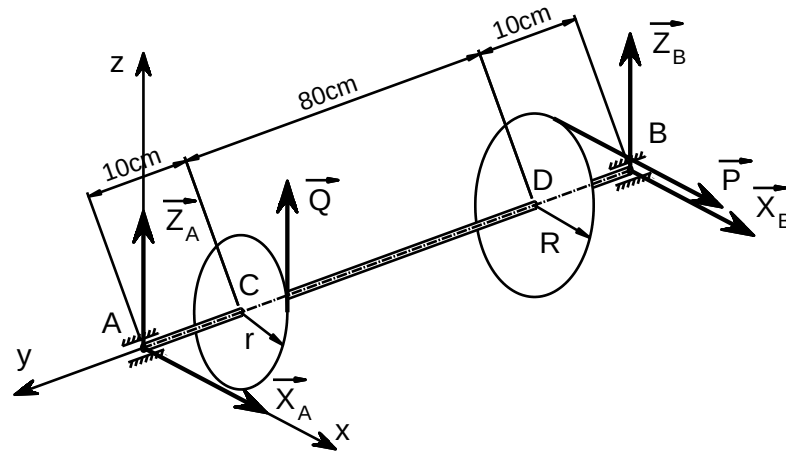
$$\begin{cases} S_A = 100(N) > 0 \\ S_B = 220(N) > 0 \\ S_O = 40(N) > 0 \end{cases}$$

- Kết luận: $\vec{S}_A, \vec{S}_B, \vec{S}_O$ có chiều như hình vẽ.

$$\begin{cases} \vec{S}'_A = -\vec{S}_A \\ \vec{S}'_B = -\vec{S}_B \\ \vec{S}'_O = -\vec{S}_O \end{cases}$$

3) Ví dụ 3 – Về hệ lực không gian bất kỳ

Trên trục nằm ngang đặt hai gối đỡ A, B có bánh răng C bán kính $r = 10(cm)$ và bánh răng D có bán kính $R = 1(m)$; các kích thước khác cho trên hình. Tại bánh răng C đặt lực thẳng đứng $\vec{Q}$, tại D đặt lực nằm ngang $\vec{P}$ có trị số $10(N)$. Xác định Q và phản lực tại A, B khi trục cân bằng?



Bài giải

- Khảo sát sự cân bằng của trục AB
- Chọn hệ trục tọa độ Axyz như hình vẽ
- Do các lực nằm trong những mặt phẳng vuông góc với trục nên tại hai gối đỡ A và B, thành phần phản lực dọc trục sẽ không có ($Y_A = 0, Y_B = 0$) mà chỉ có các thành phần: X_A, Z_A, X_B, Z_B
- Khi đó, ta có hệ lực không gian bất kỳ tác dụng lên trục AB gồm:
 - + Các phản lực liên kết: X_A, Z_A, X_B, Z_B
 - + Các lực đã cho: $\vec{P}, \vec{Q}$
- Vậy hệ lực không gian cân bằng tác dụng lên trục AB là:

$$(\vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B, \vec{P}, \vec{Q}) \sim 0$$

- Áp dụng điều kiện cân bằng cho hệ lực không gian bất kỳ:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^6 F_{ix} = X_A + X_B + P = 0 \\ \sum_{i=1}^6 F_{iz} = Z_A + Z_B + Q = 0 \\ \sum_{i=1}^6 m_x(\vec{F}_i) = Q \cdot 10 + Z_B \cdot 100 = 0 \\ \sum_{i=1}^6 m_y(\vec{F}_i) = Q \cdot r - P \cdot R = 0 \\ \sum_{i=1}^6 m_z(\vec{F}_i) = -X_B \cdot 100 - P \cdot 90 = 0 \end{cases}$$

- Đổi $R = 1(m) = 100(cm)$
- Thay số, giải hệ phương trình trên ta được:

$$\begin{cases} X_A = -1(N) < 0 \\ Z_A = -90(N) < 0 \\ X_B = -9(N) < 0 \\ Z_B = -10(N) < 0 \\ Q = 100(N) \end{cases}$$

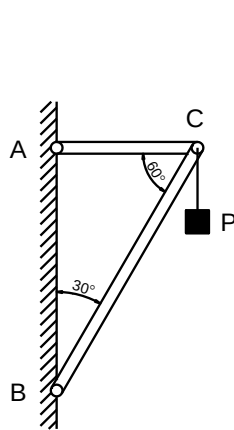
– Kết luận: $\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Z_A}, \overrightarrow{X_B}, \overrightarrow{Z_B}$ có chiều ngược với hình vẽ.

II. Các ví dụ phân hệ lực phẳng

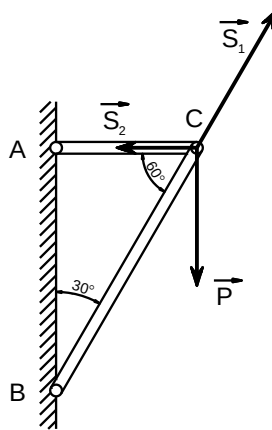
1) Ví dụ 1:

Cho các thanh AC và BC có trọng lượng không đáng kể liên kết với nhau và với tường bởi các bản lề tại A, B và C như hình vẽ. Đầu C treo vật nặng có trọng lượng $P = 30(N)$. Hãy xác định phản lực của các thanh AC và BC:

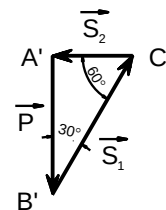
- Bằng phương pháp hình học?
- Bằng phương pháp giải tích?



Hình a



Hình b



Hình c

Bài giải

❶ Phương pháp hình học

- Khảo sát sự cân bằng của nút C.
- Giải phóng nút C khỏi các mối liên kết: Liên kết thanh AC và BC, thay vào đó bằng các phản lực liên kết tương ứng $\overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}$ có chiều giả thiết như hình vẽ b.
- Khi đó, nút C chịu tác dụng của hệ lực phẳng đồng quy gồm các lực như sau:
 - + Các phản lực liên kết thanh: $\overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}$
 - + Trọng lượng của vật nặng $\overrightarrow{P}$
- Vậy hệ lực cân bằng tác dụng lên nút C là: $(\overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}, \overrightarrow{P}) \sim 0$
- Hệ lực trên là hệ lực phẳng đồng quy.

- Áp dụng quy tắc đa giác lực: Tại điểm A' bất kỳ, chọn tỷ lệ xích chiều dài $\mu = 10$ (N/cm) ta biểu diễn lực $\vec{P}$ (tương đương 3cm) bằng véc tơ $\vec{A'B'}$ do $\vec{P}$ biết trước cả trị số lẫn phương chiều.

- Từ A' và B' dựng các đường thẳng song song với các phương của $\vec{S_1}, \vec{S_2}$, chúng cắt nhau tại C'.

- Để được tam giác lực khép kín, ta chọn chiều của $\vec{S_1}, \vec{S_2}$ sao cho phù hợp với chiều (quay) của $\vec{P}$. Vậy, ta đã xác định được phương, chiều của $\vec{S_1}, \vec{S_2}$ dựa vào quy tắc tam giác lực khép kín. Chiều giả sử như trên là đúng.

- Do các cạnh tương ứng song song nên $\triangle ABC$ đồng dạng với $\triangle A'B'C'$

- Từ đó, trị số của $\vec{S_1}, \vec{S_2}$ được xác định bằng cách dùng thước để đo các đoạn thẳng $\vec{B'C'}$ và $\vec{A'C'}$

❷ Phương pháp giải tích

- Khảo sát sự cân bằng của nút C.

- Giải phóng nút C khỏi các mối liên kết: Liên kết thanh AC và BC, thay vào đó bằng các phản lực liên kết tương ứng $\vec{S_1}, \vec{S_2}$ có chiều giả thiết như hình vẽ.

- Khi đó, nút C chịu tác dụng của hệ lực phẳng đồng quy gồm các lực như sau:

+ Các phản lực liên kết thanh: $\vec{S_1}, \vec{S_2}$

+ Trọng lượng của vật nặng $\vec{P}$.

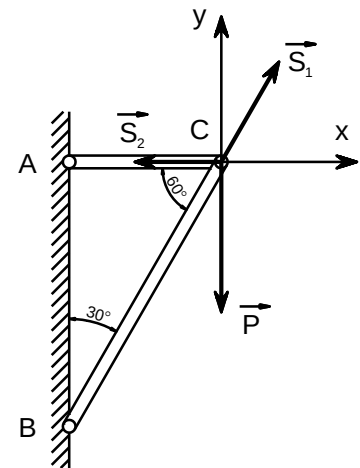
- Vậy hệ lực cân bằng tác dụng lên nút C là:
 $(\vec{S_1}, \vec{S_2}, \vec{P}) \sim 0$

- Hệ lực trên là hệ lực phẳng đồng quy.

- Chọn hệ trục tọa độ Cxy như hình vẽ.

- Áp dụng điều kiện cân bằng cho hệ lực phẳng đồng quy, ta thiết lập được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_{1x} + S_{2x} + P_x = 0 \\ S_{1y} + S_{2y} + P_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 \cdot \cos 60^\circ - S_2 = 0 \\ S_1 \cdot \sin 60^\circ - P = 0 \end{cases}$$

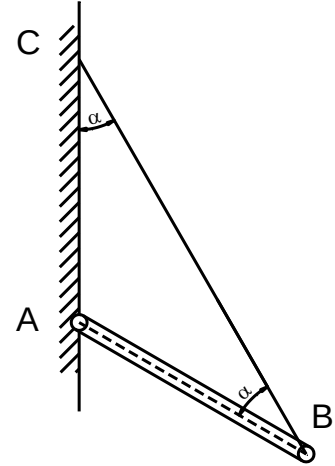


- Giải hệ phương trình trên ta được:
$$\begin{cases} S_1 = 20\sqrt{3}(N) \\ S_2 = 10\sqrt{3}(N) \end{cases}$$
- Kết luận: do $S_1, S_2 > 0$ nên $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ có chiều đúng như giả thiết.

2) Ví dụ 2:

Thanh đồng chất AB nặng $P = 2N$ treo vào tường thẳng đứng nhờ bản lề A và dây BC. Biết $\alpha = 30^\circ$. Hãy xác định phản lực $\vec{R}_A$ tác dụng lên bản lề A và sức căng dây BC?

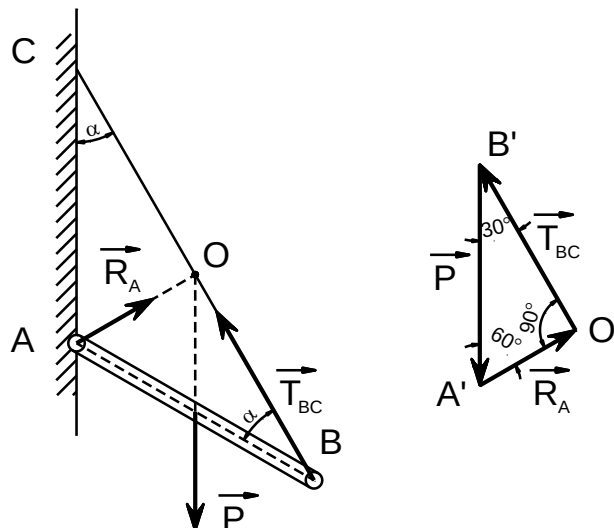
- Bằng phương pháp hình học?
- Bằng phương pháp giải tích?



Bài giải

❶ Phương pháp hình học

- Khảo sát thanh AB cân bằng
- Liên kết: Bản lề tại A, dây BC
- Hệ lực cân bằng tác dụng lên thanh AB: $(\vec{R}_A, \vec{T}_{BC}, \vec{P}) \sim 0$
- Theo định lý “Ba lực phẳng không song song cân bằng nhau”: Phương của trọng lực $\vec{P}$ và phản lực $\vec{T}_{BC}$ cắt nhau tại O nên phương của phản lực $\vec{R}_A$ cũng phải đi qua O.



- Phương pháp giải tương tự ví dụ 1: Dựng $\Delta O'A'B'$ đồng dạng với ΔOAB như hình vẽ.

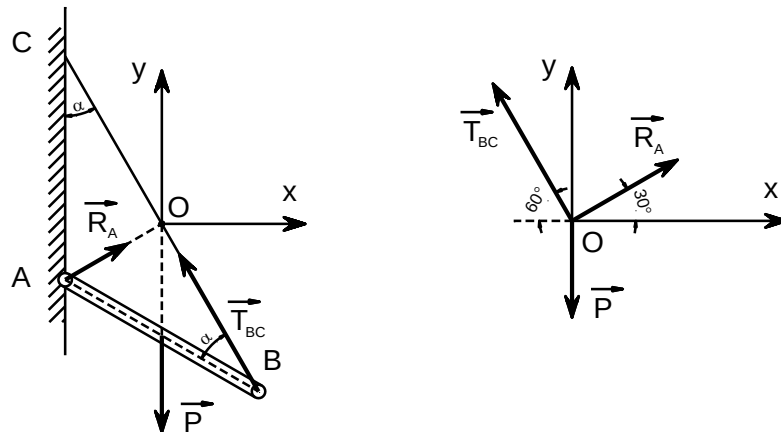
- Khi đó, trị số các phản lực $\vec{R}_A, \vec{T}_{BC}$ được bằng cách dùng thước đo các đoạn thẳng $\vec{AO'}$ và $\vec{O'B'}$ rồi nhân với tỷ lệ xích chiều dài μ đã chọn ta được kết quả sau:

$$\begin{cases} R_A = 1(N) \\ T_{BC} = \sqrt{3}(N) \end{cases}$$

- Sức căng dây BC có trị số $T'_{BC} = T_{BC} = \sqrt{3}(N)$ nhưng có chiều ngược với chiều của $\vec{T}_{BC}$: $\vec{T}'_{BC} = -\vec{T}_{BC}$

② Phương pháp giải tích

- Khảo sát thanh AB cân bằng
- Liên kết: Bản lề tại A, dây BC
- Hệ lực cân bằng tác dụng lên thanh AB: $(\vec{R}_A, \vec{T}_{BC}, \vec{P}) \sim 0$
- Theo định lý “Ba lực phẳng không song song cân bằng nhau”: Phương của trọng lực $\vec{P}$ và phản lực $\vec{T}_{BC}$ cắt nhau tại O nên phương của phản lực $\vec{R}_A$ cũng phải đi qua O.



- Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ
- Áp dụng điều kiện cân bằng cho hệ lực phẳng đồng quy, ta thiết lập được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_{Ax} + T_{BCx} + P_x = 0 \\ R_{Ay} + T_{BCy} + P_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_A \cdot \cos 30^\circ - T_{BC} \cdot \cos 60^\circ = 0 \\ R_A \cdot \sin 30^\circ + T_{BC} \cdot \sin 60^\circ - P = 0 \end{cases}$$

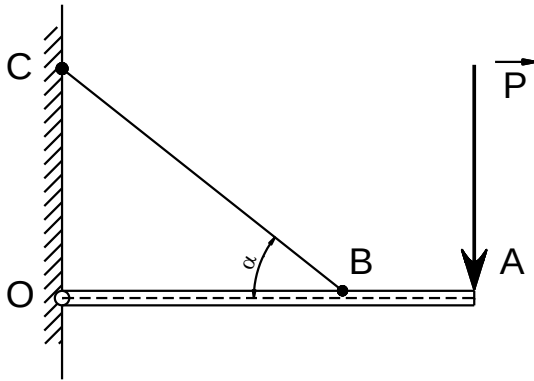
- Giải hệ phương trình trên ta được:
$$\begin{cases} R_A = 1(N) \\ T_{BC} = \sqrt{3}(N) \end{cases}$$

- Kết luận: do $R_A, T_{BC} > 0$ nên các phản lực $\vec{R}_A, \vec{T}_{BC}$ có chiều đúng như giả thiết

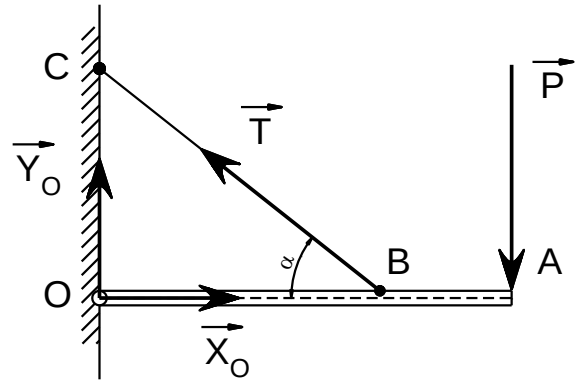
- Sức căng dây BC có trị số $T'_{BC} = T_{BC} = \sqrt{3}(N)$ nhưng có chiều ngược với chiều của $\vec{T}_{BC}$: $\vec{T}'_{BC} = -\vec{T}_{BC}$

3) Ví dụ 3

Thanh OA có trọng lượng không đáng kể gắn vào tường thẳng đứng nhờ bản lề O và dây BC; đầu A chịu tác dụng bởi lực $\vec{P}$ như hình vẽ. Hãy xác định phản lực tại O và sức căng dây BC. Biết: $OB = 2AB$, $\alpha = 30^\circ$?



Hình a



Hình b

Bài giải

- Chọn vật khảo sát: Thanh OA
- Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ
- Giải phóng thanh OA khỏi các mối liên kết: Liên kết bản lề cố định tại O, liên kết dây B và thay vào đó bằng các phản lực liên kết tương ứng $\vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{T}$ như hình vẽ.
- Khi đó, thanh OA chịu tác dụng của hệ lực phẳng bất kỳ gồm các lực như sau:
 - + Các phản lực liên kết: $\vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{T}$
 - + Lực đã cho: $\vec{P}$
- Vậy hệ lực cân bằng tác dụng lên thanh OA là: $(\vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{T}, \vec{P}) \sim 0$
- Áp dụng điều kiện cân bằng dạng 1 cho hệ lực phẳng bất kỳ:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = X_O - T \cos \alpha = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_O + T \sin \alpha - P = 0 \\ \sum_{i=1}^n m_O(\vec{F}_i) = -P \times OA + T \sin \alpha \times OB = 0 \end{cases}$$

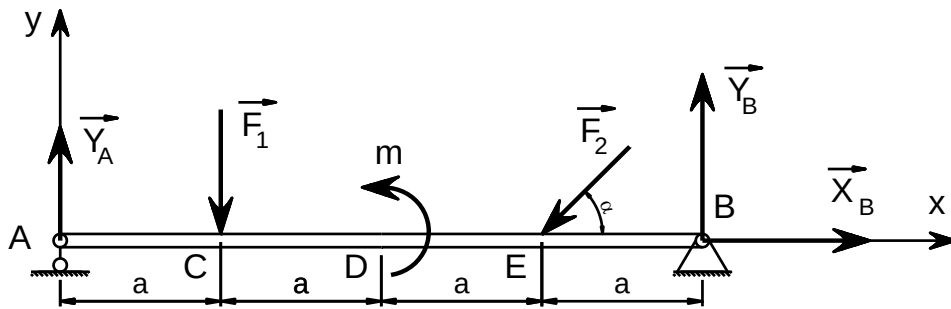
- Thay số, giải hệ phương trình trên ta được

$$\begin{cases} T = 3P \\ X_O = \frac{3P\sqrt{3}}{2} > 0 \\ Y_O = \frac{P}{2} > 0 \end{cases}$$

- Kết luận: $\vec{X}_O, \vec{Y}_O$ có chiều như hình vẽ

4) Ví dụ 4

Cho dầm AB đặt trên bản lề di động tại A, bản lề cố định tại B và chịu tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ và mô-men ngẫu lực m như hình vẽ. Hãy xác định các phản lực tác dụng lên dầm, biết: $F_1 = 10(kN), F_2 = 16(kN), m = 20(kN.m), \alpha = 45^\circ, a = 1(m)$



Bài giải

- Chọn vật khảo sát: Khảo sát sự cân bằng của dầm AB
- Chọn hệ trục tọa độ Axy như hình vẽ
- Giải phóng dầm AB khỏi các mối liên kết: Liên kết bản lề di động tại A, liên kết bản lề cố định tại B và thay vào đó bằng các phản lực liên kết tương ứng $\vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ như hình vẽ.
- Khi đó, dầm AB chịu tác dụng của hệ lực phẳng bất kỳ gồm các lực như sau:
 - + Các phản lực liên kết: $\vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$
 - + Các lực đã cho: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, m$
- Vậy hệ lực cân bằng tác dụng lên dầm AB là: $(\vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{F}_1, \vec{F}_2, m) \sim 0$
- Áp dụng điều kiện cân bằng dạng 2 cho hệ lực phẳng bất kỳ:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = X_B - F_2 \cos \alpha = 0 \\ \sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i) = -F_1 \cdot a + m - F_2 \sin \alpha \cdot 3a + Y_B \cdot 4a = 0 \\ \sum_{i=1}^n m_B(\vec{F}_i) = -Y_A \cdot 4a + F_1 \cdot 3a + m + F_2 \sin \alpha \cdot a = 0 \end{cases}$$

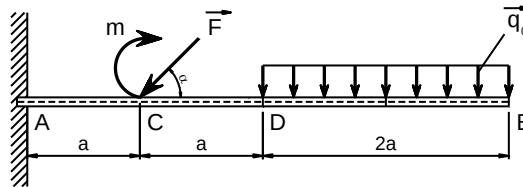
- Thay số, giải hệ phương trình trên ta được

$$\begin{cases} Y_A = \frac{50 + 8\sqrt{2}}{4} (kN) > 0 \\ X_B = 8\sqrt{2} (kN) > 0 \\ Y_B = \frac{-10 + 24\sqrt{2}}{4} (kN) > 0 \end{cases}$$

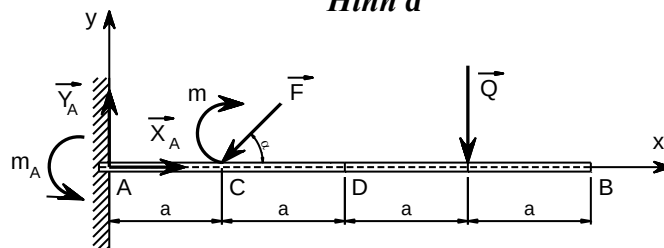
- Kết luận: $\vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ có chiều như hình vẽ.

5) Ví dụ 5

Dầm AB có ngàm tại A chịu tác dụng của các lực: Lực tập trung $F = 10(kN)$ đặt tại C nghiêng so với phương ngang góc $\alpha = 45^\circ$; hệ lực phân bố đều $q_0 = 8(kN/m)$ trên đoạn BD; và một mômen ngẫu lực $m = 6(kN.m)$ như hình vẽ. Hãy xác định các phản lực tại ngàm A của dầm? Cho $a = 1(m)$



Hình a



Hình b

Bài giải

- Chọn vật khảo sát: Khảo sát sự cân bằng của dầm AB
- Chọn hệ trục tọa độ Axy như hình vẽ
- Giải phóng dầm AB khỏi các mối liên kết: Liên kết ngàm tại A và thay vào đó bằng các phản lực liên kết tương ứng $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, m_A$ như hình vẽ.
- Khi đó, dầm AB chịu tác dụng của hệ lực phẳng bất kỳ gồm các lực như sau:
 - + Các phản lực liên kết: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, m_A$
 - + Các lực đã cho: $\vec{F}, \vec{Q} (Q = q_0.2a), m$
- Vậy hệ lực cân bằng tác dụng lên dầm AB là: $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, m_A, \vec{F}, \vec{Q}, m) \sim 0$
- Áp dụng điều kiện cân bằng dạng 1 cho hệ lực phẳng bất kỳ:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A - F \cdot \cos \alpha = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A - F \cdot \sin \alpha - Q = 0 \\ \sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i) = m_A - F \sin \alpha \cdot a - m - Q \cdot 3a = 0 \end{cases}$$

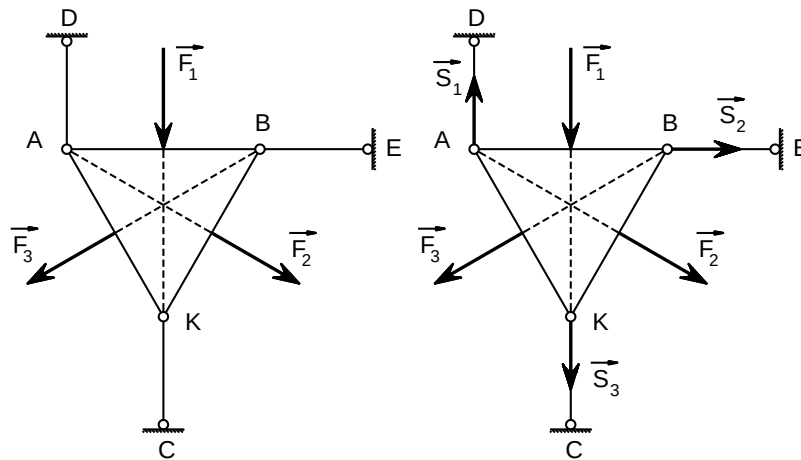
– Thay số, giải hệ phương trình trên ta được

$$\begin{cases} X_A = 5\sqrt{2} \text{ (kN)} > 0 \\ Y_A = 16 + 5\sqrt{2} \text{ (kN)} > 0 \\ m_A = 54 + 5\sqrt{2} \text{ (kN.m)} > 0 \end{cases}$$

– Kết luận: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, m_A$ có chiều như hình vẽ.

6) Ví dụ 6

Cho tấm phẳng tam giác đều ABC có cạnh là a liên kết với tường nhờ các thanh AD, BE, CK trọng lượng không đáng kể. Tấm phẳng chịu tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ như hình vẽ. Hãy xác định các phản lực tác dụng lên các thanh AD, BE, CK ; biết: $F_1 = 100 \text{ (kN)}; F_2 = 200 \text{ (kN)}; F_3 = 300 \text{ (kN)}$



Bài giải

- Khảo sát sự cân bằng của tấm phẳng ABC
- Giải phóng tấm phẳng ABC khỏi các mối liên kết: Liên kết thanh tại A, B, C và thay vào đó bằng các phản lực liên kết tương ứng $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$ như hình vẽ.
- Khi đó, dầm AB chịu tác dụng của hệ lực phẳng bất kỳ gồm các lực như sau:
 - + Các phản lực liên kết: $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$
 - + Các lực đã cho: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$
- Vậy hệ lực cân bằng tác dụng lên dầm AB là: $(\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim 0$

- Áp dụng điều kiện cân bằng dạng 3 cho hệ lực phẳng bất kỳ:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i) = -S_3 \cdot \frac{a}{2} - F_1 \cdot \frac{a}{2} - F_3 \cdot \frac{a}{2} = 0 \\ \sum_{i=1}^n m_B(\vec{F}_i) = -S_1 \cdot a + S_3 \cdot \frac{a}{2} + F_1 \cdot \frac{a}{2} + F_2 \cdot \frac{a}{2} = 0 \\ \sum_{i=1}^n m_C(\vec{F}_i) = S_1 \cdot \frac{a}{2} - S_2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin 60^\circ - F_2 \cdot \frac{a}{2} + F_3 \cdot \frac{a}{2} = 0 \end{cases}$$

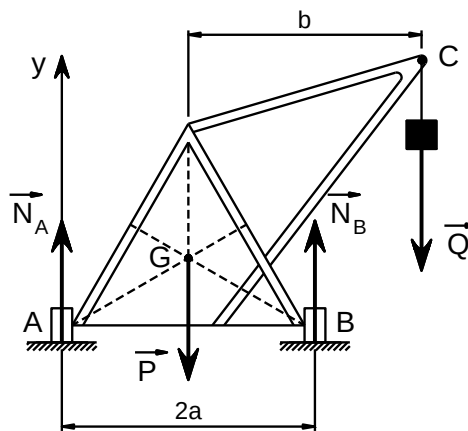
- Thay số, giải hệ phương trình trên ta được

$$\begin{cases} S_1 = 350(kN) > 0 \\ S_2 = 300\sqrt{3}(kN) > 0 \\ S_3 = -400(kN) < 0 \end{cases}$$

- Kết luận: $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ có chiều như hình vẽ; $\vec{S}_3$ có chiều ngược với hình vẽ.

7) Ví dụ 7

Mô hình một cầu trục có trọng lượng $P = 400(N)$ được đặt trên đường ray nằm ngang tại A và B, cầu vật nặng có trọng lượng $Q = 100(N)$ như hình vẽ. Hãy xác định các phản lực tác dụng lên cầu trục? Biết $2a = 2,5(m); b = 3,5(m)$



Bài giải

- Khảo sát sự cân bằng của cầu trục
- Giải phóng cầu trục khỏi các mối liên kết: Liên kết tựa tại A, B và thay vào đó bằng các phản lực liên kết tương ứng $\vec{N}_A, \vec{N}_B$ như hình vẽ.
- Khi đó, cầu trục chịu tác dụng của hệ lực phẳng song song gồm các lực như sau:
 - + Các phản lực liên kết: $\vec{N}_A, \vec{N}_B$
 - + Các lực đã cho: $\vec{P}, \vec{Q}$
- Vậy hệ lực cân bằng tác dụng lên dầm AB là: $(\vec{N}_A, \vec{N}_B, \vec{P}, \vec{Q}) \sim 0$

- Áp dụng điều kiện cân bằng cho hệ lực phẳng song song:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{iy} = N_A + N_B - P - Q = 0 \\ \sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i) = -P \cdot a + N_B \cdot 2a - Q(a+b) = 0 \end{cases}$$

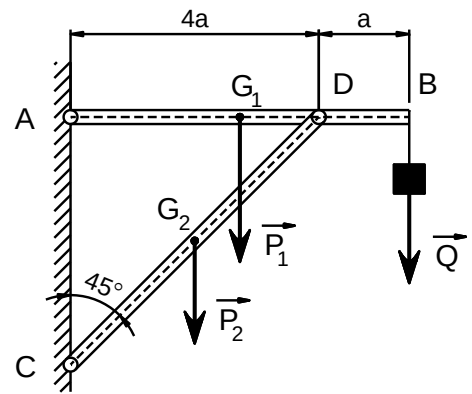
- Thay số, giải hệ phương trình trên ta được

$$\begin{cases} N_A = 110(N) \\ N_B = 390(N) \end{cases}$$

- Kết luận: $\vec{N}_A, \vec{N}_B$ có chiều như hình vẽ;

8) Ví dụ 8

Thanh AB có trọng lượng $P_1 = 160(kN)$ liên kết với tường nhờ bản lề tại A, đầu B treo vật nặng $Q = 200(kN)$. Để thanh AB nằm ngang, người ta sử dụng thanh chống CD có trọng lượng $P_2 = 100(kN)$ liên kết với tường và với thanh AB nhờ các bản lề tại C và D. Hãy xác định các phản lực tại A và C theo hai phương pháp:



- Hóa rắn?

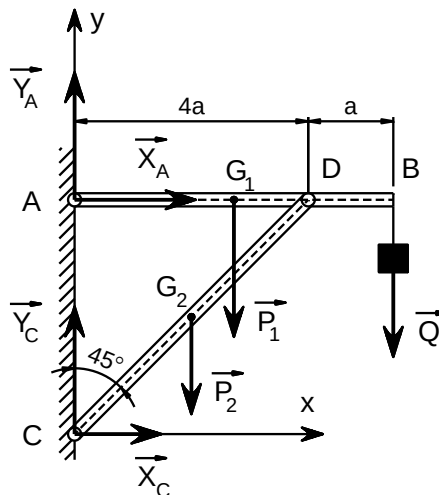
- Tách vật?

Biết $a = 1(m)$

Bài giải

❶ Phương pháp hóa rắn

- Nhận xét: Đây là bài toán hệ vật gồm 2 thanh AB và CD liên kết với nhau
- Có thể áp dụng phương pháp hoá rắn để giải.



- Coi hệ vật trên như một vật rắn cân bằng dưới tác dụng của hệ lực:

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_C, \vec{Y}_C) \sim 0$$

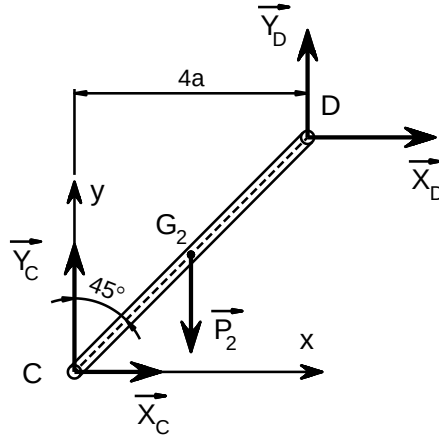
- Viết phương trình cân bằng:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A + X_C = 0 & (1) \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A + Y_C - P_1 - P_2 - Q = 0 & (2) \\ \sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i) = X_C \cdot 4a - P_1 \frac{5a}{2} - P_2 \cdot 2a - Q \cdot 5a = 0 & (3) \end{cases}$$

- Như vậy, ta có 4 ẩn số cần tìm là X_A, Y_A, X_C, Y_C nhưng chỉ có 3 phương trình.

Do đó, ta phải tách thêm 1 vật để có thể viết thêm 1 phương trình.

- Giả sử tách riêng thanh CD:



- Hệ lực cân bằng tác dụng lên thanh CD là: $(\vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{X}_D, \vec{Y}_D, \vec{P}_2) \sim 0$

- Viết phương trình cân bằng cho thanh CD:

$$\sum_{i=1}^n m_D(\vec{F}_i) = X_C \cdot 4a - Y_C \cdot 4a + P_2 \cdot 2a = 0 \quad (4)$$

- Kết hợp (1), (2), (3), (4) ta có hệ 4 phương trình 4 ẩn:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A + X_C = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A + Y_C - P_1 - P_2 - Q = 0 \\ \sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i) = X_C \cdot 4a - P_1 \frac{5a}{2} - P_2 \cdot 2a - Q \cdot 5a = 0 \\ \sum_{i=1}^n m_D(\vec{F}_i) = X_C \cdot 4a - Y_C \cdot 4a + P_2 \cdot 2a = 0 \end{cases}$$

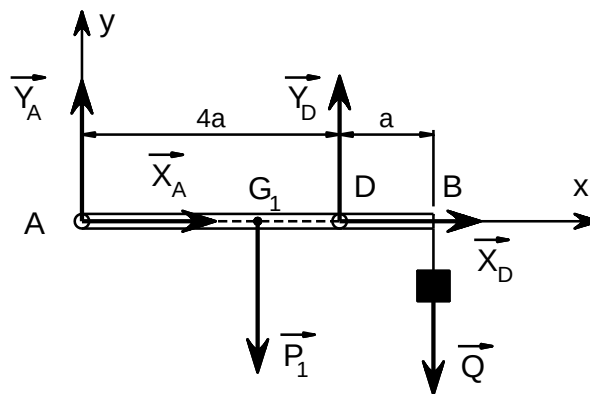
- Thay số, giải hệ phương trình trên ta được:

$$\begin{cases} X_A = -400(kN) < 0 \\ Y_A = 10(kN) > 0 \\ X_C = 400(kN) > 0 \\ Y_C = 450(kN) > 0 \end{cases}$$

- Kết luận: $\overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{X_C}, \overrightarrow{Y_C}$ có chiều như hình vẽ; $\overrightarrow{X_A}$ có chiều ngược với hình vẽ

② Phương pháp tách vật

- Tách riêng thanh AB và khảo sát sự cân bằng của thanh AB dưới tác dụng của hệ lực: $(\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{X_D}, \overrightarrow{Y_D}, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{Q}) \sim 0$



- Viết phương trình cân bằng cho thanh AB:

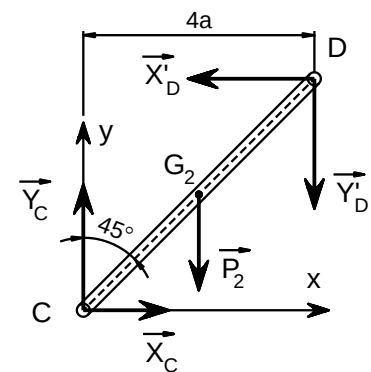
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A + X_D = 0 & (1) \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A + Y_D - P_1 - Q = 0 & (2) \\ \sum_{i=1}^n m_A(\overrightarrow{F_i}) = -P_1 \cdot 2a + Y_D \cdot 4a - Q \cdot 5a = 0 & (3) \end{cases}$$

- Tách tiếp thanh CD và khảo sát sự cân bằng của thanh CD dưới tác dụng của hệ lực:

$$(\overrightarrow{X_C}, \overrightarrow{Y_C}, \overrightarrow{X'_D}, \overrightarrow{Y'_D}, \overrightarrow{P_2}) \sim 0$$

Trong đó: $\begin{cases} X'_D = X_D \\ Y'_D = Y_D \end{cases}$

- Viết phương trình cân bằng cho thanh CD:



$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_C + X'_D = 0 \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_C - Y'_D - P_2 = 0 \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n m_C(\vec{F}_i) = -P_2 \cdot 2a + X'_D \cdot 4a - Y'_D \cdot 4a = 0 \quad (6)$$

– Thay số, giải hệ 6 phương trình trên ta được:

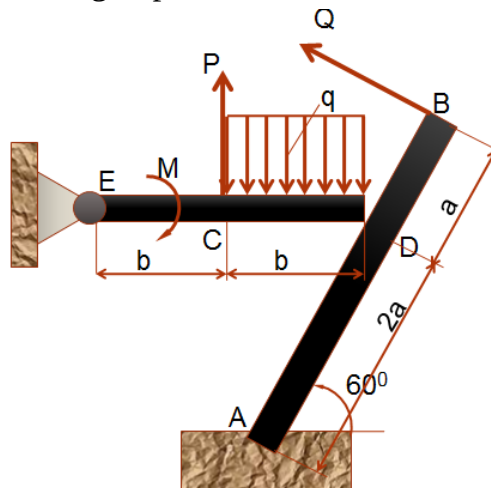
$$\begin{cases} X_A = -400(kN) < 0 \\ Y_A = 10(kN) > 0 \\ X_C = 400(kN) > 0 \\ Y_C = 450(kN) > 0 \end{cases}$$

– Kết luận: $\vec{Y}_A, \vec{X}_C, \vec{Y}_C$ có chiều như hình vẽ; $\vec{X}_A$ có chiều ngược với hình vẽ.

B. CÁC BÀI TẬP TỔNG HỢP (CÓ GỢI Ý LỜI GIẢI)

1) Bài tập 1

Cho cơ hệ có liên kết và chịu lực như hình vẽ. Bỏ qua ma sát tại D, E và trọng lượng các vật. Biết $a = 0,6m$; $b = 0,4m$; $AD = 2BD = 2a$; $CD = CE = b$; $M = 160Nm$; $Q = 2P$; $q = 1000N/m$. Hãy xác định các phản lực tại D, khớp bản lề E (nếu hệ cân bằng) và ngàm A ứng với trường hợp của lực P: $P = 800N$;



Hướng dẫn:

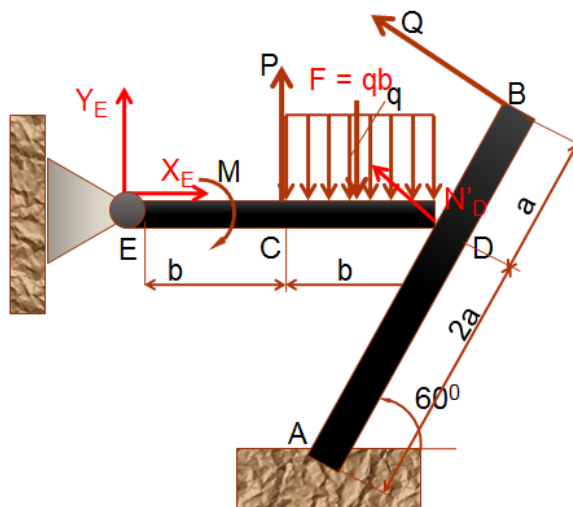
Điều kiện cân bằng của hệ: Phản lực tựa: $N_D = N'_D > 0$.

Tách hệ thành 2 bộ phận và khảo sát riêng sự cân bằng của dầm ECD và dầm ADB.

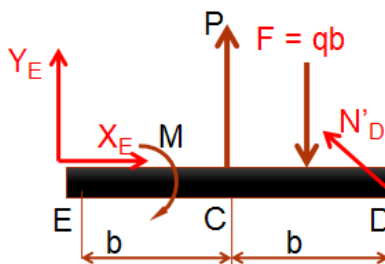
* Các phản lực liên kết tác dụng lên dầm ECD: X_E, Y_E, N'_D

* Các phản lực liên kết tác dụng lên dầm ED: X_A , Y_A , M_A , N_D

Trong đó $N'_D = N_D$ (cùng độ lớn nhưng ngược chiều).



Các phương trình cho dầm ED:

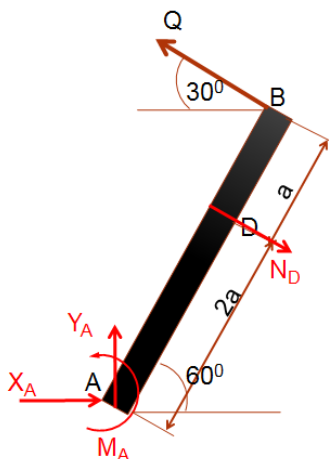


$$\sum m_E(F_i) = 0 \Leftrightarrow N'_D \cdot \cos 60^\circ \cdot 2b - M + P \cdot b - F \cdot 1,5b = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow X_E - N'_D \cdot \sin 60^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow Y_E + P - F + N'_D \cdot \cos 60^\circ = 0 \quad (3)$$

Các phương trình cân bằng cho dầm AB:



$$\sum F_x = N_D \cdot \cos 30^\circ + X_A - Q \cdot \cos 30^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_y = -N_D \cdot \sin 30^\circ + Y_A + Q \cdot \sin 30^\circ = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_A(F_i) = M_A + Q \cdot 3a - N_D \cdot 2a = 0 \quad (6)$$

$$\text{Từ (1): } N'_D = \frac{M - P \cdot b + 1,5 q \cdot b^2}{b} \quad (7)$$

Trường hợp: P = 800N.

Từ (7) ta có: $N'_D = 200N$

Từ (2) ta có: $X_E = 100\sqrt{3}N$

Từ (3) ta có: $Y_E = -500N \rightarrow Y_E$ ngược chiều đã chọn

Từ (4) ta có: $X_A = (Q - N_D) \cos 30^\circ = 700\sqrt{3}N$

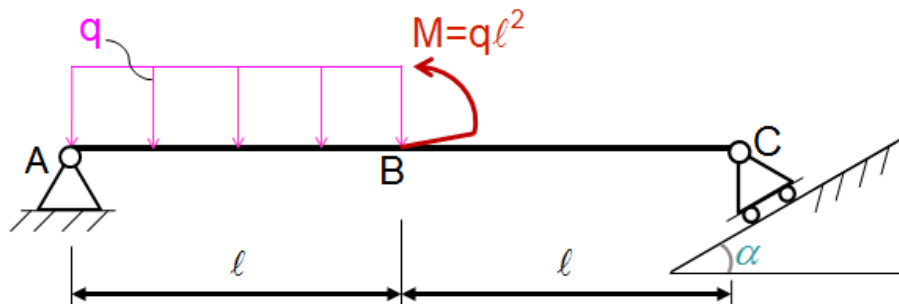
Từ (5) ta có: $Y_A = (N_D - Q) \sin 30^\circ = -700N$

Từ (6) ta có: $M_A = N_D \cdot 2a - Q \cdot 3a = -2640Nm$

$\rightarrow Y_A, M_A$ ngược chiều đã chọn.

2) Bài tập 2

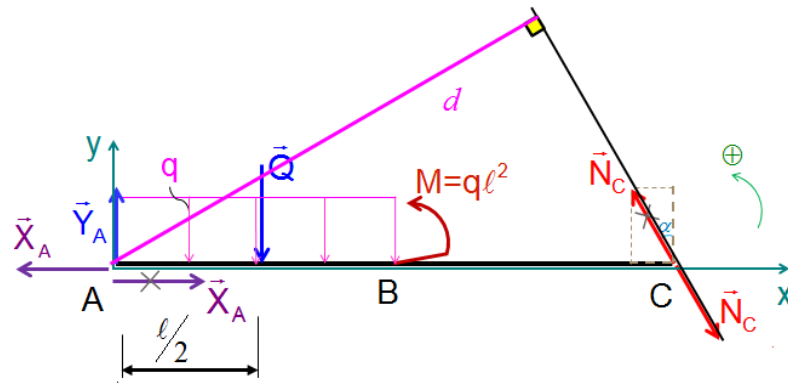
Cho cơ hệ như hình vẽ (hình 1). Cho: q, ℓ, α . Hãy xác định các phản lực liên kết tại A và C?



Hướng dẫn:

Xác định các phản lực liên kết tại A và C.

- Khảo sát sự cân bằng của thanh ABC.
- Tự do hóa thanh ABC:



Ta có:

$$Q = q \cdot \ell; \quad d = AC \cdot \cos \alpha = 2\ell \cdot \cos \alpha$$

Viết các phương trình cân bằng cho hệ lực tác động:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = X_A - N_C \cdot \sin \alpha = 0 & (1) \\ \sum F_{iy} = Y_A - Q + N_C \cdot \cos \alpha = 0 & (2) \\ \sum \bar{M}_A(\vec{F}_i) = -Q \times \frac{\ell}{2} + M + N_C \times d = 0 & (3) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình (1), (2), (3) ta thu được các kết quả:

$$(3) \Rightarrow N_C = \frac{-q\ell}{4 \cos \alpha} < 0$$

$$(1) \Rightarrow X_A = \frac{-q\ell}{4} \tan \alpha < 0$$

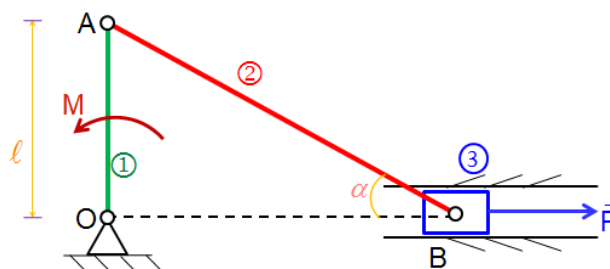
$$(2) \Rightarrow Y_A = \frac{5}{4} q\ell > 0$$

3) Bài tập 3

$$\text{Cho } \begin{cases} OA = \ell \\ \alpha = 30^\circ; M \end{cases}$$

a. Tìm điều kiện của lực P để cho hệ cân bằng?

b. Xác định phản lực liên kết của khớp trượt B lên con trượt B, phản lực của thanh AB lên con trượt B, phản lực của thanh AB và khớp bản lề O lên thanh OA.



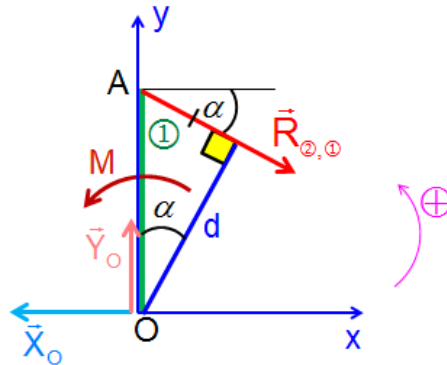
Hướng dẫn:

a. Dùng phương pháp tách vật

Thanh AB là 1 liên kết thanh trong hệ.

- * Khảo sát sự cân bằng của thanh OA.
- Tự do hoá thanh OA.
- Thiết lập phương trình cân bằng cho thanh OA.

$$d = \ell \cdot \cos \alpha$$



Ta có :

$$\begin{cases} \sum F_x = -X_O + R_{2,1} \cos \alpha = 0 \\ \sum F_y = Y_O - R_{2,1} \sin \alpha = 0 \\ \sum M_A(\vec{F}) = M - X_O \times \ell = 0 \text{ hay } \sum M_O(\vec{F}) = M - R_{2,1} \cdot d = 0 \end{cases}$$

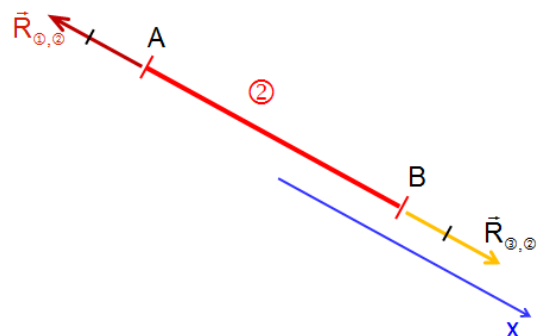
$$\Rightarrow \begin{cases} X_O = \frac{M}{\ell} > 0 \\ R_{2,1} = \frac{M}{\ell \cos \alpha} > 0 \\ Y_O = \frac{M}{\ell} \tan \alpha > 0 \end{cases}$$

- * Khảo sát sự cân bằng của thanh AB.

- Tự do hoá thanh AB.

$$\sum F_x = R_{3,2} - R_{2,2} = 0$$

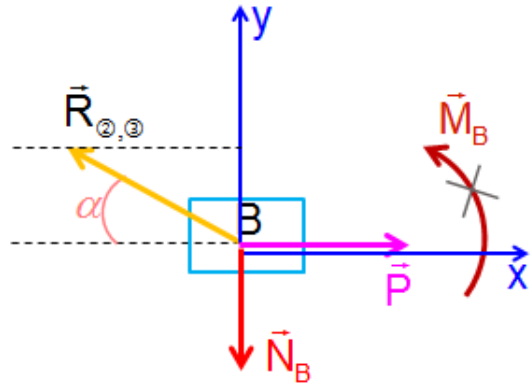
$$\Rightarrow R_{3,2} = R_{2,2} = R_{2,1} = \frac{M}{\ell \cos \alpha} > 0$$



- * Khảo sát sự cân bằng của con trượt B.
- Tự do hoá con trượt B:
- Ta có:

$$\begin{cases} \sum F_x = P - R_{\textcircled{2},\textcircled{3}} \cos \alpha = 0 \\ \sum F_y = -N_B + R_{\textcircled{2},\textcircled{3}} \sin \alpha = 0 \\ \sum M_B(\vec{F}) = M_B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_B = 0 \\ N_B = \frac{M}{\ell} \tan \alpha > 0 \\ P = \frac{M}{\ell} > 0 \end{cases}$$



b. Xác định:

- * Phản lực của khớp trượt B tác dụng lên con trượt B là:

$$\begin{cases} M_B = 0 \\ N_B = \frac{M}{\ell} \tan \alpha \end{cases}$$

- * Phản lực của thanh AB tác dụng lên con trượt B là:

$$R_{\textcircled{2},\textcircled{3}} = R_{\textcircled{3},\textcircled{2}} = \frac{M}{\ell \cos \alpha} = R_{\textcircled{3},\textcircled{2}}$$

- * Phản lực của thanh AB tác dụng lên thanh OA là:

$$R_{\textcircled{2},\textcircled{1}} = R_{\textcircled{1},\textcircled{2}} = \frac{M}{\ell \cos \alpha}$$

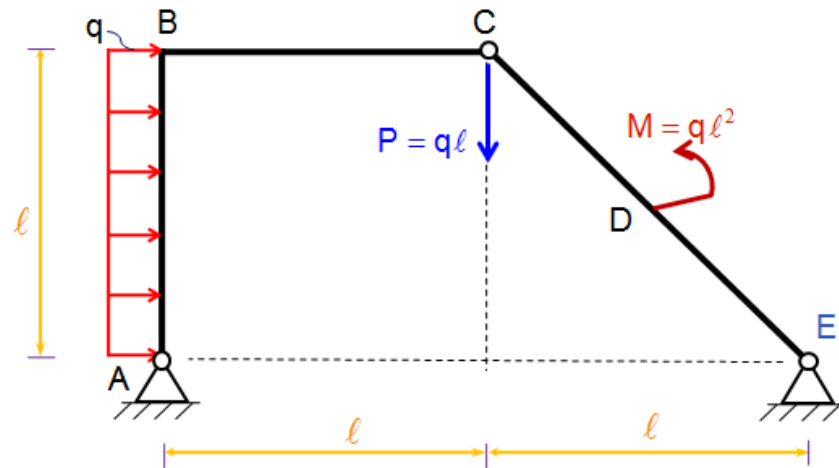
- * Phản lực của khớp bản lề cố định O tác dụng lên thanh OA là:

$$\begin{cases} X_O = \frac{M}{\ell} \\ Y_O = \frac{M}{\ell} \tan \alpha \end{cases}$$

4) Bài tập 4

Cho cơ hệ như hình vẽ. Cho: q, ℓ .

Hãy xác định các phản lực liên kết tại A, C và E.

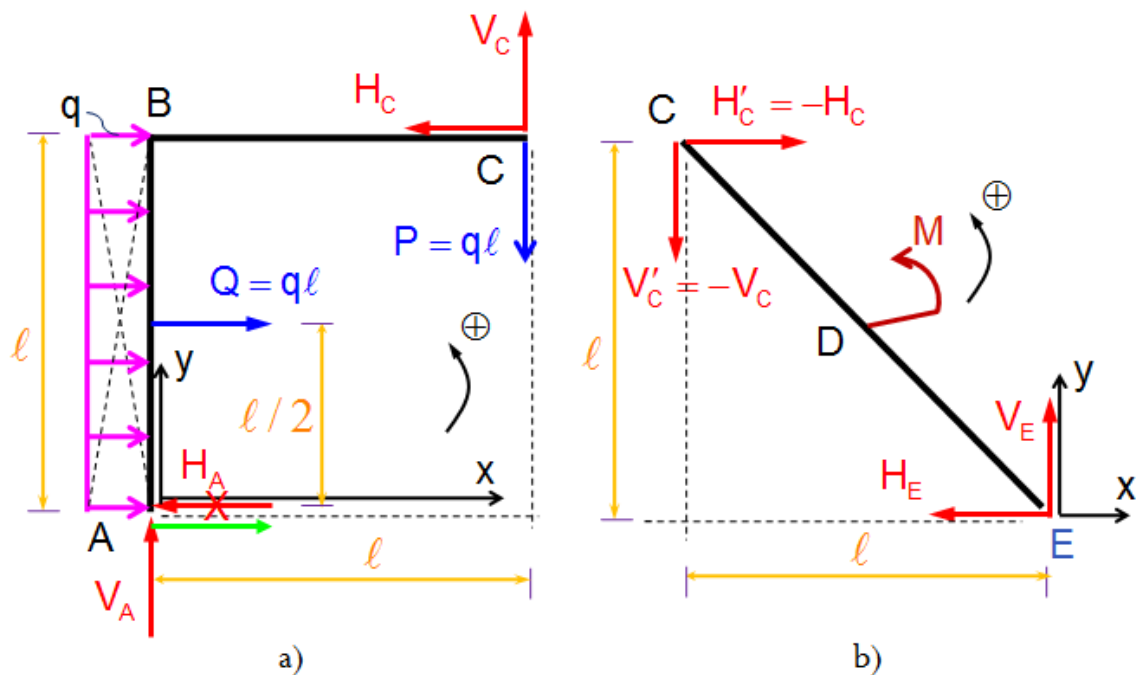


Hướng dẫn:

Xác định các phản lực liên kết trong hệ

* Khảo sát sự cân bằng của khung phẳng ABC (hình a)

+ Tự do hóa khung phẳng ABC.



+ Viết các phương trình cân bằng:

$$\sum F_{ix} = -H_A + Q - H_C = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = V_A - P + V_C = 0 \quad (2)$$

$$\sum \bar{M}_A(\vec{F}_j) = -Q \cdot \frac{l}{2} - P \cdot l + H_C \cdot l + V_C \cdot l = 0 \quad (3)$$

* Khảo sát sự cân bằng của thanh thẳng CDE.

+ Tự do hóa thanh thẳng CDE (hình b).

+ Viết các phương trình cân bằng:

$$\sum F_{jx} = H'_C - H_E = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_{jy} = -V'_C + V_E = 0 \quad (5)$$

$$\sum \bar{M}_E(\vec{F}_j) = M - H'_C \cdot \ell + V'_C \cdot \ell = 0 \quad (6)$$

* Giải hệ (1), (2), (3), (4), (5), (6) ta thu được:

$$(3) + (6): -Q \cdot \frac{\ell}{2} - P \cdot \ell + M + 2 \cdot V'_C \cdot \ell = 0 \Rightarrow V'_C = \frac{q\ell}{4} > 0$$

$$(6) \Rightarrow H'_C = \frac{5}{4}q\ell > 0$$

$$(1) \Rightarrow H_A = Q - H'_C = -\frac{1}{4}q\ell < 0$$

$$(2) \Rightarrow V_A = P - V'_C = \frac{3}{4}q\ell > 0$$

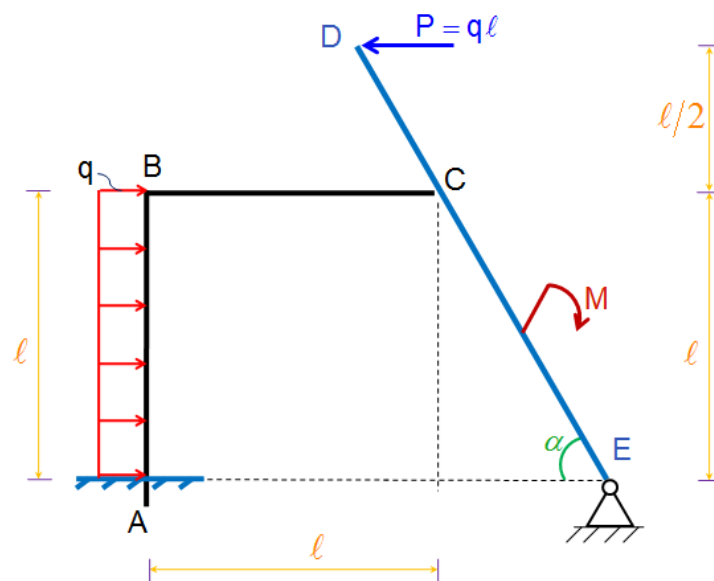
$$(4) \Rightarrow H_E = H'_C = \frac{5}{4}q\ell > 0$$

$$(5) \Rightarrow V_E = V'_C = \frac{1}{4}q\ell > 0$$

5) Bài tập 5

Cho cơ hệ như hình vẽ (hình 1). Cho: q , ℓ , α . Tìm điều kiện của moment M để hệ cân bằng. Hãy xác định các phản lực liên kết tại A và C ứng với 2 trường hợp của moment M như sau:

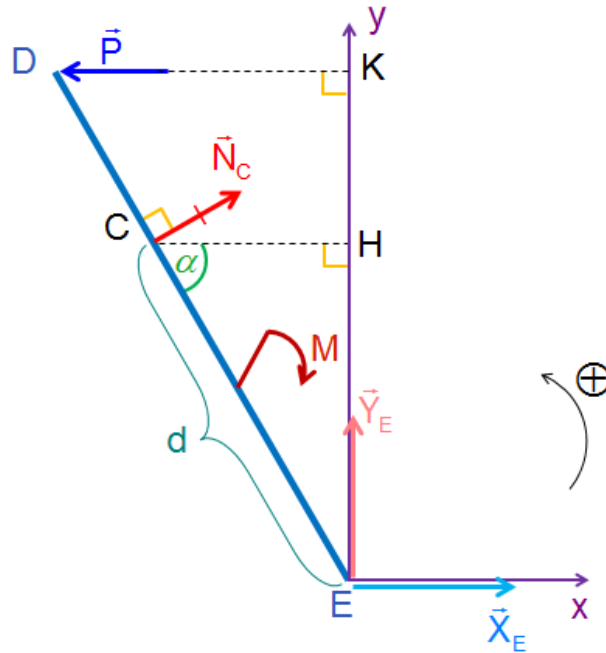
- Trường hợp 1: $M = q\ell^2$
- Trường hợp 2: $M = 2q\ell^2$



Hướng dẫn:

a. Điều kiện để hệ cân bằng là thanh DE phải cân bằng hay thanh DE phải tựa vào C. Nghĩa là $N_C > 0$.

* Khảo sát sự cân bằng của thanh DE.



Ta có:

$$EK = \frac{3}{2} \ell$$

$$\sum \bar{M}_E(\vec{F}) = P \cdot \frac{3}{2} \ell - N_C \cdot CE - M = 0$$

$$\text{Với: } CE = \frac{EH}{\sin \alpha} = \frac{\ell}{\sin \alpha}$$

$$\Leftrightarrow N_C = \frac{\frac{3}{2} q \ell^2 - M}{CE}$$

* Điều kiện để hệ cân bằng là thanh DE phải cân bằng. Nghĩa là liên kết tựa tại C phải tồn tại hay $N_C > 0$ hay:

$$\frac{3}{2} q \ell^2 - M > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} q \ell^2 > M \quad (1)$$

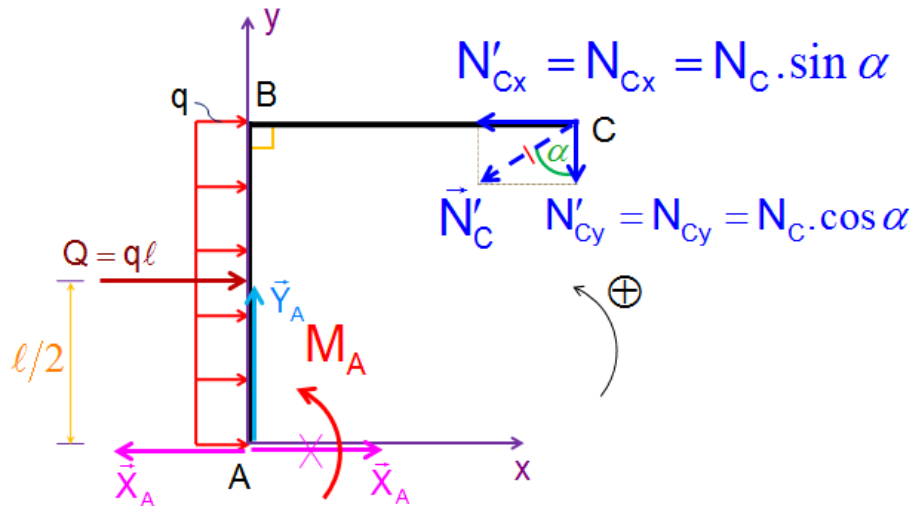
b. Xác định các phản lực liên kết tại A và C ứng với 2 trường hợp của moment M:

• **Trường hợp 1:** $M = q \ell^2$: điều kiện (1) thỏa $\Rightarrow N_C > 0 \Rightarrow$ Hệ cân bằng.

Thay $M = q \ell^2$ vào công thức tính N_C , ta có:

$$N_C = \frac{1}{2} q\ell \cdot \sin \alpha$$

* Khảo sát sự cân bằng của khung ABC:



Ta có:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = X_A + Q - N_C \sin \alpha = 0 \\ \sum F_{iy} = Y_A - N_C \cos \alpha = 0 \\ \sum \bar{M}_A (\vec{F}_j) = M_A - Q \cdot \frac{\ell}{2} + (N_C \sin \alpha) \cdot \ell - (N_C \cos \alpha) \cdot \ell = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_A = N_C \sin \alpha - Q = \frac{1}{2} q\ell \sin^2 \alpha - q\ell < 0$$

$$\Rightarrow Y_A = N_C \cos \alpha = \frac{1}{4} q\ell \sin 2\alpha > 0$$

$$\Rightarrow M_A = \frac{q\ell^2}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha - \sin^2 \alpha \right) = \frac{q\ell^2}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha + \cos^2 \alpha \right) > 0$$

Vì $X_A < 0$ nên chiều đúng của X_A ngược chiều đã chọn.

• **Trường hợp 2:** $M = 2q\ell^2 \Rightarrow$ Điều kiện (1) không thỏa nên hệ không cân bằng $\Rightarrow N_C = 0$.

Khảo sát lại sự cân bằng của khung ABC với $N'_C = N_C = 0$, ta có:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = X_A + Q = 0 \\ \sum F_{iy} = Y_A = 0 \\ \sum \bar{M}_A (\vec{F}_j) = M_A - Q \cdot \frac{\ell}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_A = -ql \\ Y_A = 0 \\ M_A = \frac{ql^2}{2} \end{cases}$$

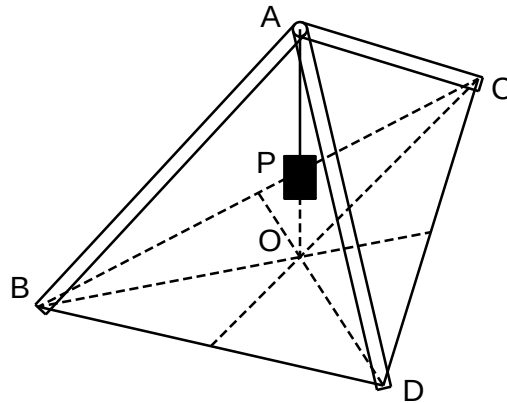
Vì $X_A < 0$ nên chiều đúng của X_A ngược chiều đã chọn.

C. BÀI TẬP ỨNG DỤNG

1. Bài tập phân hệ lực không gian

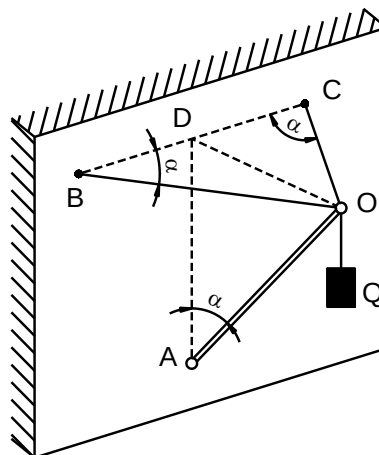
1) Bài tập 1

Tại đỉnh A của giá 3 chân AB, AC, AD treo vật nặng có trọng lượng $P = 100(N)$. Khoảng cách từ A đến đất $OA = 3(m)$, độ dài mỗi chân $l = 10(m)$; ba đỉnh B, C, D tạo thành tam giác đều. Tìm lực nén lên mỗi thanh?



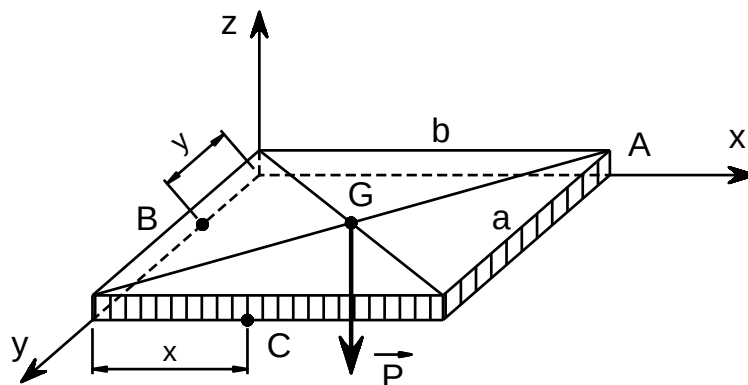
2) Bài tập 2

Để giữ vật nặng $Q = 100(N)$ người ta dùng xà OA, bắt bản lề tại A và hai dây xích nằm ngang OB, OC bắt vào tường tại B và C như hình vẽ. Tìm sức căng của xích và ứng lực của xà? Biết xà và xích có trọng lượng không đáng kể, các góc nghiêng $\alpha = 45^\circ$



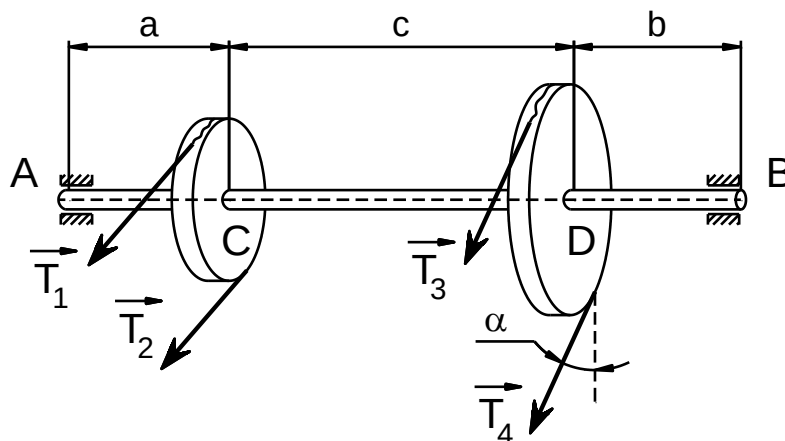
3) Bài tập 3

Một tấm phẳng hình chữ nhật có các cạnh là $a=1(m)$; $b=1,5(m)$. Tấm phẳng này được đặt trên ba điểm A, B, C với A đặt ở góc còn B và C đặt ở cạnh đối diện A như hình vẽ. Hãy xác định vị trí của điểm B và C để ba điểm A, B, C chịu lực nén như nhau? Biết tấm phẳng có trọng lượng $P=500(N)$



4) Bài tập 4

Một trục nằm ngang có hai Pu-li C và D mang đai truyền có thể quay trong các gối đỡ tại A và B. Bán kính các puli : $r_C=20(cm)$, $r_D=25(cm)$; khoảng cách giữa các pu-li với nhau và với các gối đỡ: $a=b=50(cm)$; $c=100(cm)$. Lực căng ở pu-li C nằm ngang $T_2=2T_1=500(N)$; còn ở pu-li D thì tạo với phương thẳng đứng góc $\alpha=30^\circ$ và $T_3=2T_4$. Hãy xác định lực căng T_4 và các phản lực ở A, B khi trục cân bằng?

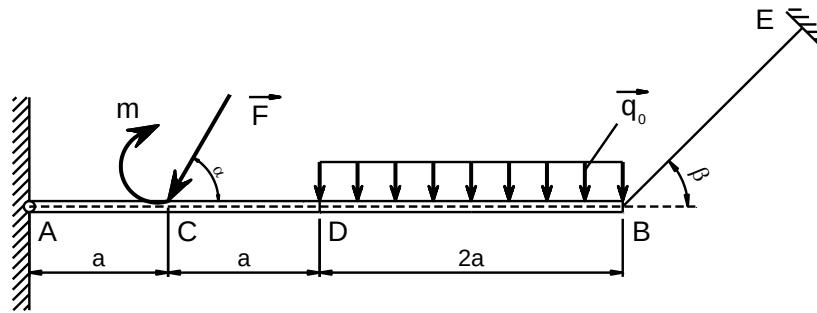


2. Bài tập phần hệ lực phẳng

1) Bài tập 1

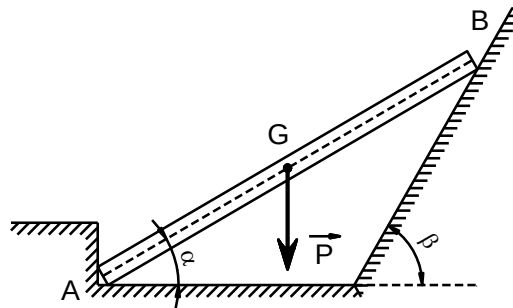
Cho dầm AB nằm ngang gắn với tường thẳng đứng nhờ bản lề tại A, đầu B được treo bởi sợi dây BE chịu tác dụng của các lực như hình vẽ. Hãy xác định các phản lực tác dụng lên dầm?

Biết: $F = 12(kN)$, $m = 8(kN.m)$, $q_0 = 16(kN/m)$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $a = 1(m)$



2) Bài tập 2

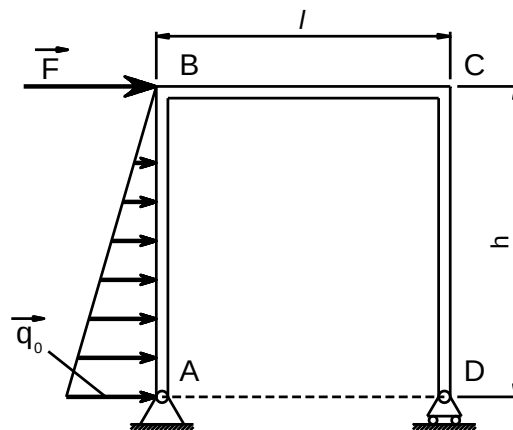
Xà đồng chất AB có trọng lượng $P = 100(N)$ được giữ trong mặt phẳng thẳng đứng như hình vẽ. Biết các góc $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$. Bỏ qua ma sát. Tìm phản lực tại A, B?



3) Bài tập 3

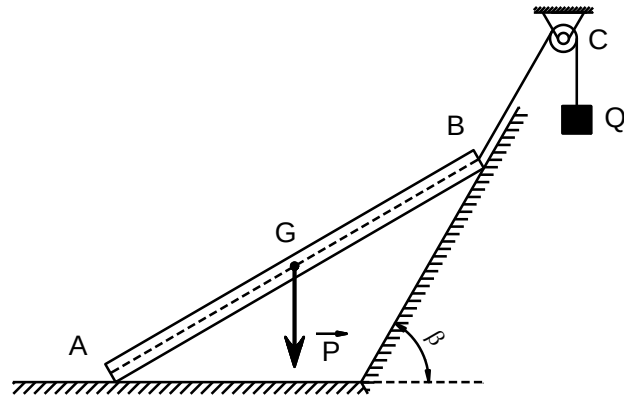
Xác định phản lực bệ đỡ của khung cứng ABCD dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ nằm ngang và hệ lực phân bố theo tam giác q_0 . Bỏ qua trọng lượng khung.

Biết $F = 2(kN)$, $q_0 = 0,2(kN/m)$, $h = 3(m)$, $l = 1,5(m)$



4) Bài tập 4

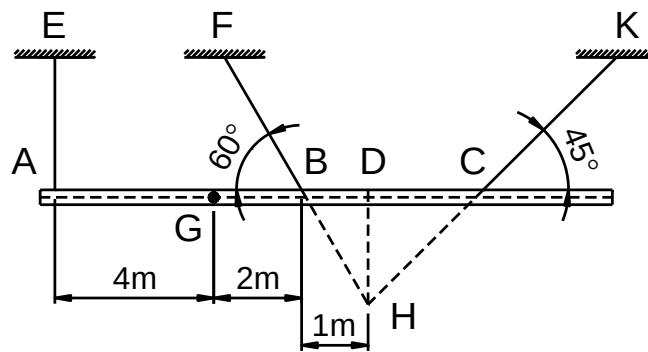
Thanh đồng chất AB trọng lượng P có đầu A tựa trên nền nhẵn nằm ngang, đầu B tựa lên mặt phẳng nghiêng với phương nằm ngang góc β và được giữ bởi dây lượn qua ròng rọc C có một đầu treo vật nặng Q . Bỏ qua ma sát. Hãy xác định các phản lực tác dụng lên thanh AB khi thanh cân bằng?



5) Bài tập 5

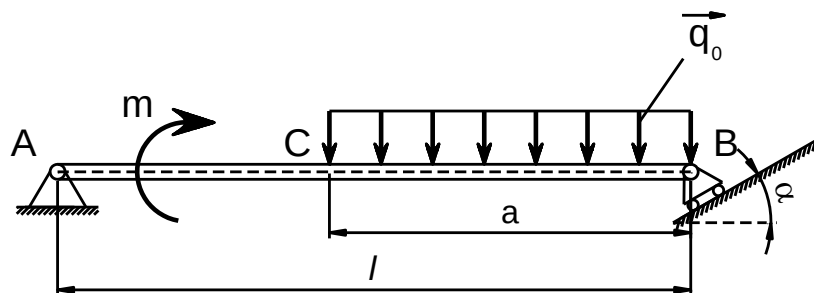
Để nâng một dầm cầu nằm ngang có trọng lượng $P = 4200(N)$, người ta dùng ba dây cáp AE, BF, CK như hình vẽ. Biết trọng tâm của dầm đặt tại G; $AG = 4(m)$, $BG = 2(m)$, $BD = 1(m)$.

Hãy xác định sức căng các dây?



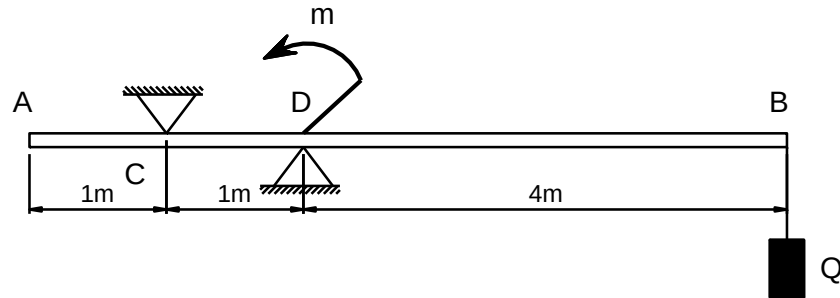
6) Bài tập 6

Xà $AB = l = 3(m)$ bỏ qua trọng lượng, bắt bản lề tại A, còn đầu B tựa trên con lăn đặt trên mặt phẳng nghiêng so với phương ngang góc $\alpha = 30^\circ$ chịu tác dụng của hệ lực phân bố đều $q_0 = 2(kN/m)$ trên một đoạn $a = 2(m)$ và một mômen ngẫu lực $m = 3(kN.m)$. Hãy xác định phản lực tại A, B?



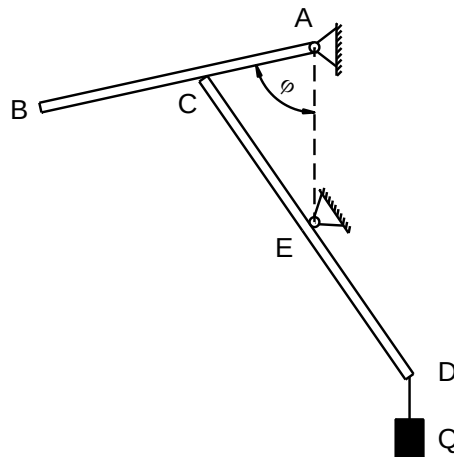
7) Bài tập 7

Một dầm đồng chất $AB = 1,5(m)$ có trọng lượng $P = 80(N)$ được đặt trên các gối tựa tại C và D. Tại mút B treo vật nặng $Q = 200(N)$, ngoài ra còn tác dụng vào dầm một ngẫu lực có mômen $m = 100(N.m)$. Các kích thước cho trên hình vẽ. Tìm phản lực tại C và D?



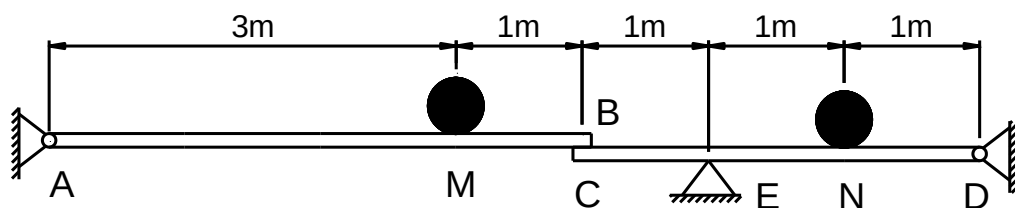
8) Bài tập 8

Thanh AB đồng chất trọng lượng P có thể quay quanh A, tựa trên thanh CD cũng đồng chất có thể quay quanh E trên đường thẳng đứng với A (E là trung điểm của CD). Biết $AB = CD = 2l$; $AE = l$. Tại mút D treo tải trọng $Q = 2P$. Tìm góc φ giữa AB và phương thẳng đứng khi hệ cân bằng?



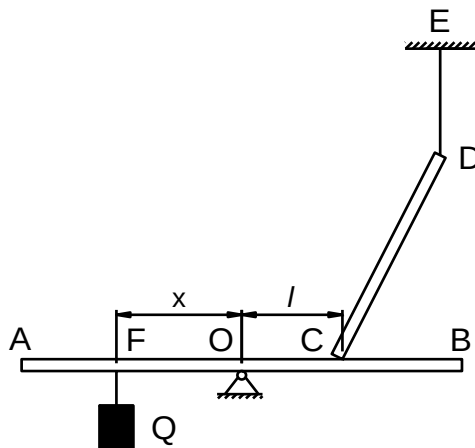
9) Bài tập 9

Xà $AB = 4(m)$ nặng $200(N)$ có thể quay quanh trục nằm ngang A, còn đầu B tựa trên xà $CD = 3(m)$, nặng $160(N)$ được đỡ tại E và nối với tường nhờ bản lề D. Tại M và N đặt hai vật đều nặng $80(N)$. Các kích thước cho trên hình vẽ. Tìm phản lực tại A, B, E, D. Biết AB và CD là các thanh đồng chất.



10) Bài tập 10

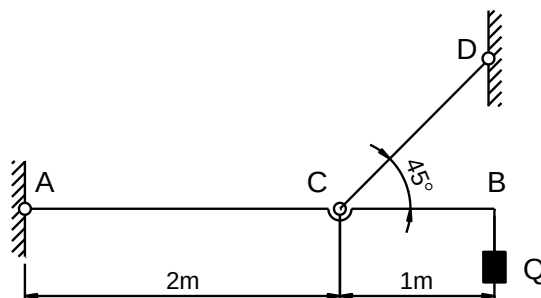
Thanh đồng chất CD có trọng lượng P được treo bởi dây DE và tựa trên thanh AB được giữ bởi bản lề O tại trọng tâm của nó với $OC = l$. Tại F treo vật nặng Q . Xác định khoảng cách $OF = x$ để thanh AB cân bằng ở vị trí nằm ngang?



11) Bài tập 11

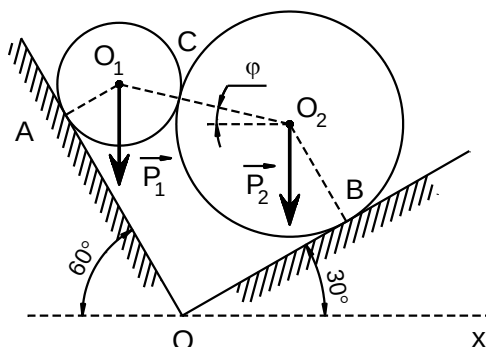
Thanh AB và CD liên kết với nhau và với tường nhờ các bản lề tại A, C và D. Đầu B treo vật nặng có trọng lượng $Q = 100(N)$. Các kích thước cho trên hình.

Hãy xác định phản lực tại A, C và D?



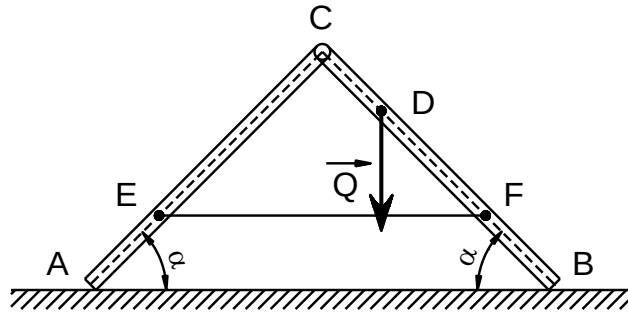
12) Bài tập 12

Cho hai quả cầu đồng chất O_1 có trọng lượng $P_1 = 10(N)$ và O_2 có trọng lượng $P_2 = 30(N)$ tựa lên nhau và lên các mặt phẳng nghiêng OA, OB tại A, B, C như hình vẽ. Hãy xác định góc φ tạo bởi O_1O_2 và phương nằm ngang, áp lực của quả cầu lên hai mặt phẳng nghiêng và áp lực giữ chúng? Các góc khác cho trên hình.



13) Bài tập 13

Cho thang chữ A có cấu tạo bởi hai thanh đồng chất AC và BC bắt bản lề ở C. Đầu A và B tựa trên nền ngang nhẵn. AC và BC được nối với nhau bởi dây EF. Một người có trọng lượng $Q = 600(N)$ đứng tại vị trí D trên hình. Hãy xác định phản lực tại A, B, C và sức căng dây EF. Biết: $AC = BC = l = 3(m)$ có cùng trọng lượng $P = 120(N)$; $AE = BF = 1(m)$; $CD = 0,6(m)$; $\alpha = 45^\circ$. Bỏ qua ma sát.



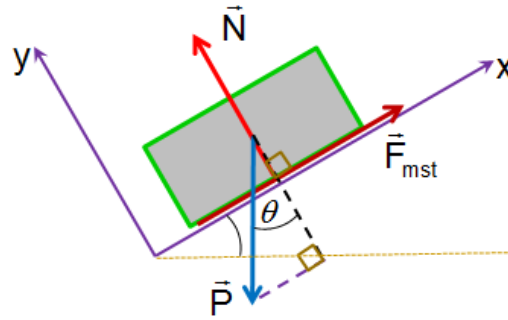
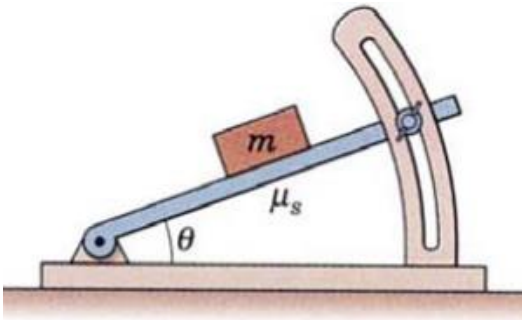
Chương 3

BÀI TOÁN CÂN BẰNG KHI KẼ ĐẾN MA SÁT

A. VÍ DỤ

1) Ví dụ 1 – Về ma sát trượt

Xác định góc θ lớn nhất để vật nặng $m(kg)$ không trượt, biết hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt nghiêng là f .



Bài giải

- Chọn vật khảo sát: Khảo sát sự cân bằng của vật nặng có khối lượng m .
- Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.
- Phân tích lực: Vật m chịu tác dụng của các lực: Trọng lực $\vec{P}$, phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ và lực ma sát trượt $\vec{F}_{ms}$
- Hệ lực cân bằng tác dụng lên vật khảo sát là: $(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}) \sim 0$
- Áp dụng điều kiện cân bằng

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 F_{ix} = F_{ms} - P \cdot \sin \theta = 0 \\ \sum_{i=1}^3 F_{iy} = N - P \cdot \cos \theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_{ms} = mg \sin \theta \\ N = mg \cos \theta \end{cases}$$

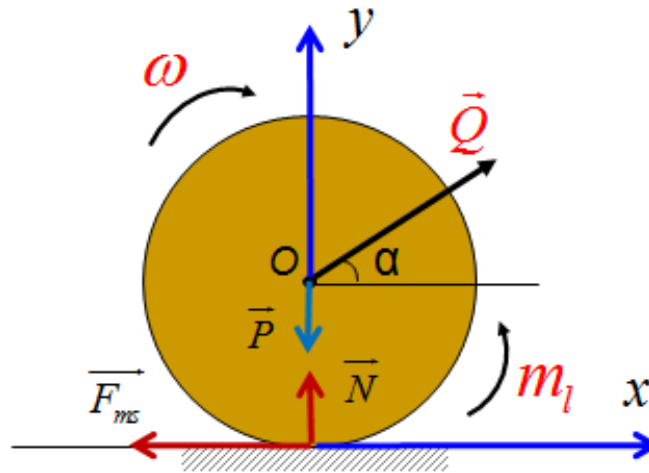
- Để vật m không trượt: $F_{ms} \leq F_{ms \max} = f \cdot N$

$$\Leftrightarrow mg \sin \theta \leq f \cdot mg \cos \theta$$

$$\Rightarrow \tan \theta \leq f$$

2) Ví dụ 2 – Về ma sát lăn

Đĩa tròn đồng chất có bán kính R , trọng lượng P chịu tác dụng của lực $\vec{Q}$ đặt tại tâm O và nghiêng góc α với phương nằm ngang như hình vẽ. Biết hệ số ma sát trượt là f , hệ số ma sát lăn là k . Tìm trị số lực $\vec{Q}$ để đĩa cân bằng?



Bài giải

- Khảo sát sự cân bằng của đĩa tròn
- Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ
- Hệ lực cân bằng tác dụng lên đĩa tròn là: $(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}, m_l)$
- Phương trình cân bằng:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 F_{ix} = Q \cos \alpha - F = 0 \\ \sum_{i=1}^5 F_{iy} = Q \sin \alpha - P + N = 0 \\ \sum_{i=1}^5 m_i = m_l - R \cdot Q \cdot \cos \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F = Q \cos \alpha \\ N = P - Q \sin \alpha \\ m_l = RQ \cos \alpha \end{cases}$$

- Thay vào điều kiện cân bằng không lăn, không trượt:

$$\begin{cases} F_{ms} \leq f \cdot N \\ m_l \leq k \cdot N \end{cases}$$

- Ta nhận được:

$$\begin{cases} Q \leq \frac{f \cdot P}{\cos \alpha + f \cdot \sin \alpha} = Q_1 \\ Q \leq \frac{\frac{k}{R} P}{\cos \alpha + \frac{k}{R} \sin \alpha} = Q_2 \end{cases}$$

- Vậy ta có điều kiện cân bằng của đĩa tròn: $Q \leq \min(Q_1, Q_2)$.

B. CÁC BÀI TẬP TỔNG HỢP (CÓ GỢI Ý LỜI GIẢI)

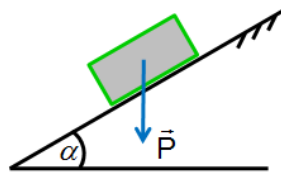
1) Bài tập 1

a. Cho cơ hệ như hình vẽ 1. Tìm điều kiện để cho vật không trượt trên mặt nghiêng?

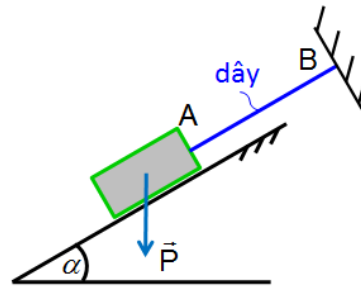
b. Cho cơ hệ như hình 2. Xác định lực căng của nhánh dây AB ứng với 2 trường hợp:

$$\text{b1. Cho: } \begin{cases} f_t = \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0,577 \\ \alpha < 30^\circ \end{cases} \quad \text{b2. Cho: } \begin{cases} f_t = \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0,577 \\ \alpha > 30^\circ \end{cases}$$

(f_t : hệ số ma sát trượt tĩnh giữa vật và mặt nghiêng)



Hình 1



Hình 2

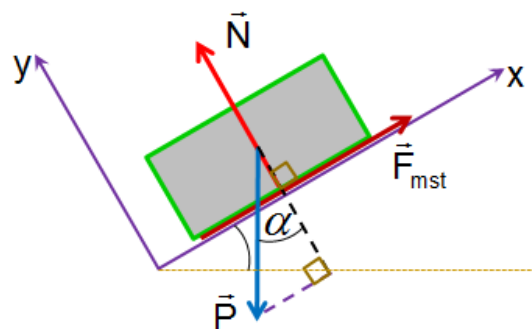
Hướng dẫn:

a. Khảo sát sự cân bằng của vật A (hình 1a)

$$\sum F_x = F_{mst} - P \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_y = N - P \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{mst} = P \cdot \sin \alpha \\ N = P \cos \alpha \end{cases}$$



Hình 1a

+ Điều kiện để vật không trượt:

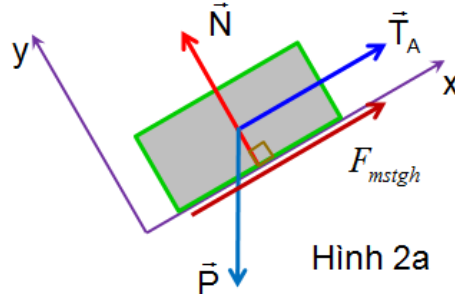
$$F_{mst} \leq F_{mstgh} = f_t \cdot N \Rightarrow P \cdot \sin \alpha \leq f_t \times P \cdot \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha \leq f_t \Leftrightarrow \alpha \leq \arctan(f_t)$$

b. Xác định lực căng của dây

b1. $\alpha < 30^\circ \Rightarrow \tan \alpha < \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = f_t$

Thoả mãn $\Rightarrow$ Vậy ma sát đủ sức để giữ vật cân bằng. Do đó, lực căng dây: $T_A = 0$



Hình 2a

b2. $\alpha > 30^\circ \Rightarrow \tan \alpha > \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = f_t$

$\Rightarrow$ Ma sát không đủ sức để giữ vật cân bằng. Lực căng dây sẽ tồn tại làm vật mất khả năng trượt. Lúc này:

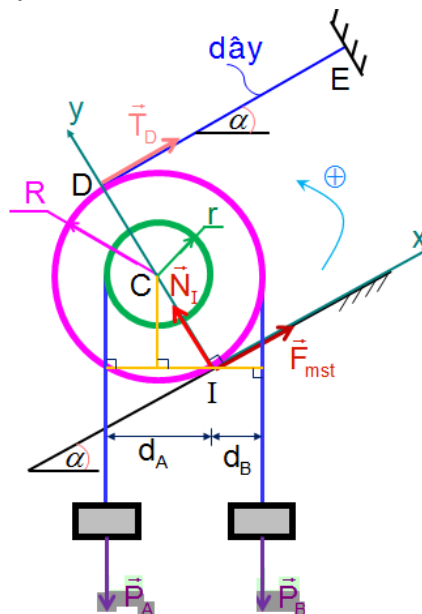
$$\sum F_{jx} = T_A - P \sin \alpha + F_{mstgh} = 0; \sum F_{jy} = N - P \cos \alpha = 0$$

$$N = P \cos \alpha; T_A = P \sin \alpha - F_{mstgh} = P \sin \alpha - f_t N = P(\sin \alpha - f_t \cos \alpha)$$

2) Bài tập 2

Cho cơ hệ như hình vẽ (Hình 1). Biết: $P_A = P_B = P$; $R = 2r$; f_t ; α . Bỏ qua ma sát và trọng lượng con lăn. Dây mềm không dẫn có khối lượng rất bé.

- Tìm điều kiện để con lăn không trượt trên mặt nghiêng?
- Ứng với điều kiện đó, hãy xác định các thành phần phản lực tại tiếp điểm I và lực căng của nhánh dây DE?



Hướng dẫn:

a. Khảo sát sự cân bằng:

$$\sum F_x = F_{mst} + T_D - P_A \sin \alpha - P \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = N_I - (P_A + P_B) \cdot \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_I = P_A (r + R \cdot \sin \alpha) - P_B (R - R \sin \alpha) - T_D \cdot 2R = 0 \quad (3)$$

$$\text{Từ (3)} \Rightarrow T_D = \frac{P}{4} [(1 + 2 \sin \alpha) - 2(1 - \sin \alpha)] = \frac{P}{4} (4 \sin \alpha - 1)$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow F_{mst} = 2P \sin \alpha - \frac{P}{4} (4 \sin \alpha - 1) = P \left(\sin \alpha + \frac{1}{4} \right)$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow N_I = 2P \cdot \cos \alpha$$

+ Điều kiện để vật không trượt là:

$$F_{mst} \leq F_{mstgh} = f_t \times N$$

$$\Leftrightarrow P \left(\sin \alpha + \frac{1}{4} \right) \leq f_t \times 2P \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha + \frac{1}{4}}{2 \cos \alpha} \leq f_t$$

b. Các thành phần phản lực tại I:

$$\begin{cases} N_I = 2P \cos \alpha \\ F_{mst} = P \left(\sin \alpha + \frac{1}{4} \right) \end{cases}$$

+ Lực căng nhánh dây DE:

$$T_D = \frac{P}{4} (4 \sin \alpha - 1)$$

Chú ý: Điều kiện để dây không bị trùng là:

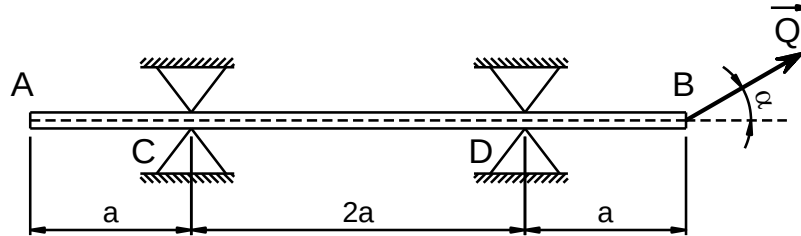
$$T_D > 0 \Leftrightarrow 4 \sin \alpha - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha > \frac{1}{4}$$

C. BÀI TẬP ỨNG DỤNG

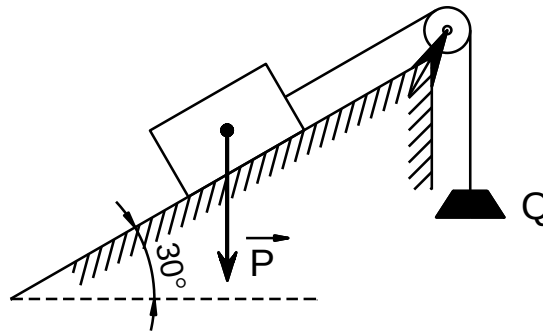
1) Bài tập 1

Thanh $AB = 4a$ có trọng lượng và bề dày không đáng kể nằm ngang trên hai ổ đỡ. Lực kéo $\vec{Q}$ tạo với phương ngang một góc α . Hệ số ma sát tại hai ổ đỡ là f . Tìm góc α để thanh không trượt dù $\vec{Q}$ rất lớn (hiện tượng tự hãm).



2) Bài tập 2

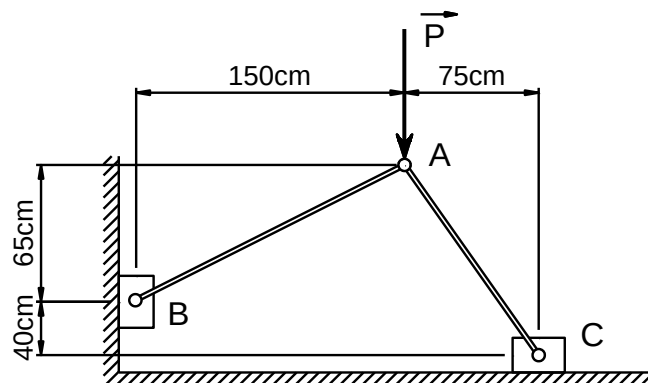
Với giá trị nào của $\vec{Q}$ để vật nặng có trọng lượng $P = 10(kN)$ đứng yên trên mặt phẳng nghiêng, biết hệ số ma sát trượt giữa vật và mặt nghiêng là $f = 0,3$. Bỏ qua ma sát của ròng rọc.



3) Bài tập 3

Cho cơ cấu hai con trượt như hình vẽ. Con trượt B có trọng lượng $P_B = 100(N)$ con trượt C có trọng lượng $P_C = 250(N)$, lực $F = 1300(N)$ tác dụng thẳng đứng vào khớp A. hãy xác định:

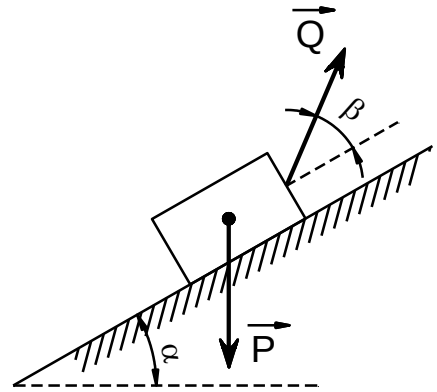
- Giá trị nhỏ nhất của f để cơ cấu cân bằng?
- Sự trượt xảy ra trước tại B hay C?



4) Bài tập 4

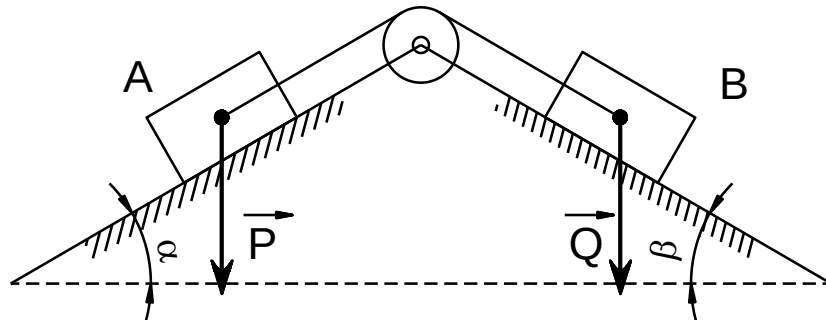
Vật A có trọng lượng P nằm trên mặt phẳng nghiêng góc α so với phương nằm ngang. Tác dụng lên A một lực $\vec{Q}$ lập với phương nghiêng góc β như hình vẽ. Hệ số ma sát giữa A và mặt nghiêng là f . Xác định điều kiện của Q để A cân bằng trong hai trường hợp:

- Vật A có xu hướng trượt lên trên?
- Vật A có xu hướng trượt xuống dưới?



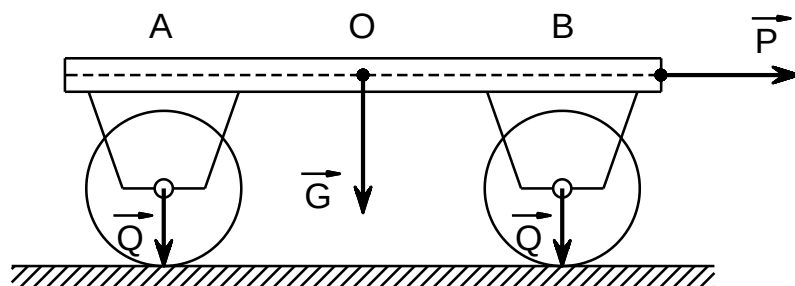
5) Bài tập 5

Hai vật A và B có trọng lượng lần lượt là P và Q nằm trên hai mặt nghiêng với phương ngang các góc α, β và được nối với nhau bởi một sợi dây luồn qua ròng rọc ma sát không đáng kể. Hãy xác định tỉ số P/Q khi hệ cân bằng. Biết góc ma sát giữa mặt nghiêng với các tải trọng là φ



6) Bài tập 6

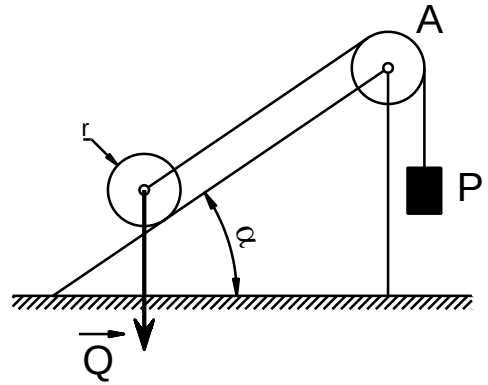
Xác định trị số lực ngang $\vec{P}$ tác dụng vào xe trọng lượng G chuyển động đều trên đường ray nếu trọng lượng các bánh xe là Q , bán kính R , hệ số ma sát lăn giữa bánh xe và đường ray là k , và $OA = OB$.



7) Bài tập 7

Một con lăn hình trụ bán kính r nặng Q được giữ cân bằng trên mặt phẳng nghiêng so với phương ngang góc α nhờ sợi dây luồn qua ròng rọc A có một đầu treo tải trọng $\vec{P}$. Cho hệ số ma sát lăn là k , hệ số ma sát trượt là f . Bỏ qua ma sát của ròng rọc, hãy:

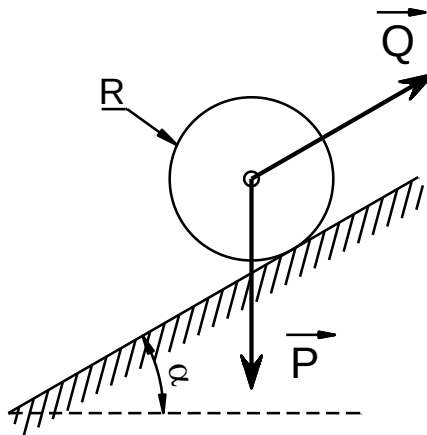
- Xác định giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của P để con lăn cân bằng.
- Giá trị bé nhất của f để con lăn khi chuyển động thì lăn không trượt?



8) Bài tập 8

Vật hình trụ có trọng lượng P , bán kính R nằm trên mặt phẳng nghiêng góc α so với phương ngang. Khối trụ chịu tác dụng của lực kéo $\vec{Q}$ hướng lên trên và song song với mặt nghiêng như hình vẽ. Biết hệ số ma sát trượt và lăn là f và k . Tìm điều kiện để khối trụ:

- Đứng yên trên mặt nghiêng.
- Lăn không trượt lên phía trên.



PHẦN II: ĐỘNG HỌC

MỞ ĐẦU

Động học nghiên cứu chuyển động cơ học của vật thể (chất điểm) về mặt hình học mà không quan tâm đến nguyên nhân gây chuyển động và biến đổi chuyển động của chúng.

Khi vật thể có kích thước rất bé so với quỹ đạo chuyển động của nó hoặc có thể bỏ qua thì ta coi đó là chất điểm chuyển động, gọi tắt là động điểm.

Chuyển động xảy ra trong không gian có tính tương đối: Có thể chuyển động đối với vật này nhưng lại đứng yên đối với vật khác, phụ thuộc vào vật ta lấy làm mốc để theo dõi chuyển động. Vật lấy làm mốc được gọi là hệ quy chiếu.

Động học nghiên cứu bốn vấn đề chính sau đây:

- Tìm phương trình chuyển động
- Xác định quỹ đạo chuyển động
- Xác định vận tốc chuyển động
- Xác định gia tốc chuyển động

Các phương pháp được dùng để nghiên cứu chuyển động của chất điểm trong hệ quy chiếu đã xác định là: Phương pháp vectơ, phương pháp tọa độ Đề-các và phương pháp tọa độ tự nhiên.

Chương 4

CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT ĐIỂM

A. VÍ DỤ

1) Ví dụ 1

Cho điểm $M \in$ mặt phẳng Oxy có phương trình chuyển động:

$$\begin{cases} x = a.\sin \omega t \\ y = b.\cos \omega t \end{cases}$$

(x, y tính bằng mét; t tính bằng giây; giả sử a, b là các hằng số dương và $a < b$)

Hãy xác định:

- Phương trình quỹ đạo của điểm M
- Vận tốc, gia tốc điểm M tại $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$

Bài giải

Bài toán cho phương trình chuyển động của chất điểm nên ta dùng phương pháp tọa độ Đề-các để nghiên cứu.

- Để tìm quỹ đạo điểm M, ta tìm cách khử t trong phương trình chuyển động

$$\begin{cases} \sin \omega t = \frac{x}{a} \\ \cos \omega t = \frac{y}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 \omega t = \left(\frac{x}{a}\right)^2 \\ \cos^2 \omega t = \left(\frac{y}{b}\right)^2 \end{cases}$$

- Cộng hai vế của phương trình sau:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Vậy quỹ đạo điểm M là đường E-lip có trục bé là $2a$, trục lớn là $2b$.

- Vận tốc điểm M tại $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$

Hình chiếu vận tốc tính theo công thức:

$$\begin{cases} V_x = \dot{x} = a.\omega.\cos \omega t \\ V_y = \dot{y} = -b.\omega.\sin \omega t \end{cases}$$

Vận tốc toàn phần:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{a^2\omega^2\cos^2\omega t + b^2\omega^2\sin^2\omega t}$$

Thay $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ vào phương trình trên, giải ra ta được $V = b.\omega$

- Gia tốc của điểm tại $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$

Hình chiếu gia tốc tính theo công thức:

$$\begin{cases} W_x = \dot{V}_x = \ddot{x} = -a.\omega^2.\sin \omega t \\ W_y = \dot{V}_y = \ddot{y} = -b.\omega^2.\cos \omega t \end{cases}$$

Gia tốc toàn phần:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = \sqrt{a^2\omega^4 \sin^2 \omega t + b^2\omega^4 \cos^2 \omega t}$$

Thay $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ vào phương trình trên, giải ra ta được $W = a.\omega^2$

2) Ví dụ 2

Chất điểm chuyển động trên đường tròn bán kính $R = 6(cm)$ theo quy luật:

$$S = -12t^3 + 9t^2 + 6 \quad S(cm); t(s)$$

Xác định vận tốc, gia tốc của điểm đó sau 1 giây?

Bài giải

- Bài toán cho quỹ đạo chuyển động của chất điểm nên ta dùng phương pháp tọa độ tự nhiên để nghiên cứu.
- Chọn gốc tọa độ O. Vị trí đầu tiên của điểm là $S_0 = S|_{t=0} = 6(cm)$
- Sau 1 giây, điểm cách O: $S_1 = S|_{t=1s} = 6 + 9.1^2 - 12.1^3 = 3(cm)$
- Tính vận tốc

$$V = \frac{d}{dt}(6 + 9t^2 - 12t^3) = 18t - 36t^2$$

- Tại $t = 1(s)$ thì $V_1 = V|_{t=1s} = -18(cm/s)$
- Dấu $(-)$ đó chứng tỏ vận tốc có chiều ngược với chiều dương đã chọn trên quỹ đạo.
- Xác định gia tốc
- Ta có: $\vec{W} = \vec{W}_t + \vec{W}_n$

$$\begin{cases} W_t = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} = 18 - 72t \\ W_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{R} = \frac{(18 - 36t^2)^2}{6} \end{cases}$$

- Tại $t = 1s$ thì:

$$\begin{cases} W_t = 18 - 72 = -54 \left(\frac{cm}{s^2} \right) \\ W_n = \frac{(18 - 36)^2}{6} = 54 \left(\frac{cm}{s^2} \right) \end{cases}$$

- Vậy: $W_1 = \sqrt{W_t^2 + W_n^2} = 54\sqrt{2} \left(\frac{cm}{s^2} \right)$

B. BÀI TẬP ỨNG DỤNG

1) Bài tập 1

Cho phương trình chuyển động của điểm, hãy xác định phương trình quỹ đạo của nó:

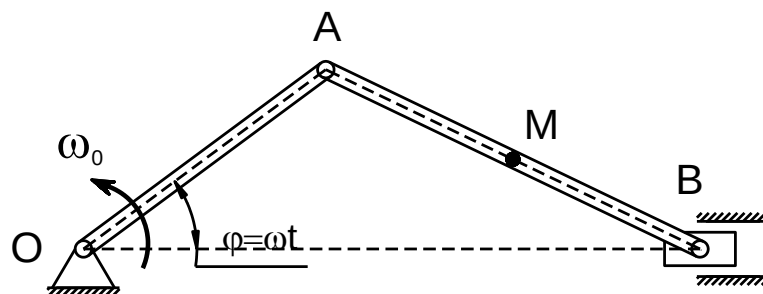
a)
$$\begin{cases} x = 5 \cos 5t^2 \\ y = 5 \sin 5t^2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x = 5 + 3 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$$

2) Bài tập 2

Tay quay OA quay quanh trục O với vận tốc không đổi $\omega_0 = 10 \left(s^{-1} \right)$ và chuyển động theo luật $\varphi = \omega_0 t$. Cho chiều dài $OA = OB = 80 \left(cm \right)$.

Tìm phương trình chuyển động, phương trình quỹ đạo trung điểm M của thanh truyền AB và phương trình chuyển động của con chạy B?

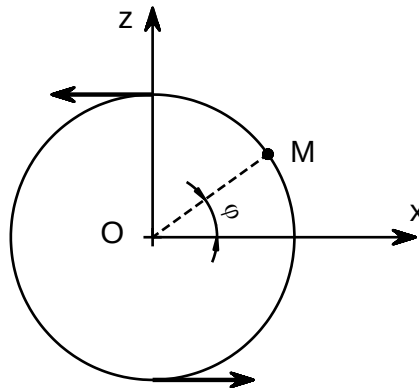


3) Bài tập 3

Một chất điểm chuyển động theo phương trình:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} \quad x, y \text{ tính bằng cm; } t \text{ tính bằng giây}$$

Xác định trị số và phương vận tốc của chất điểm khi nó ở trên trục Oy trong tọa độ Đề-các và tọa độ cực?

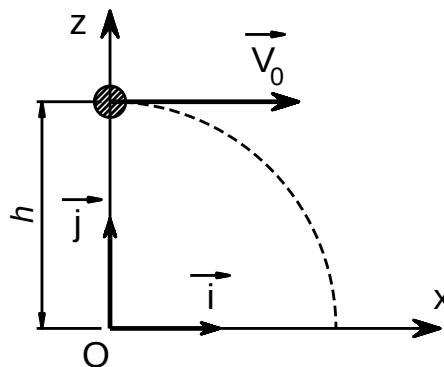


4) Bài tập 4

Một quả cầu được ném từ máy bay chuyển động theo phương trình:

$$\begin{cases} x = V_0 t \\ y = h - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Ở đây trục Ox chọn theo phương ngang, trục Oy chọn theo phương thẳng đứng hướng lên trên. Xác định vận tốc của quả cầu khi nó rơi tới đất?



5) Bài tập 5

Chất điểm chuyển động theo vòng tròn bán kính R theo luật $S = V_0 t - \frac{1}{2} a t^2$.

Xác định trị số gia tốc của điểm, thời gian cần thiết để trị số gia tốc đó bằng a , số vòng đi được của chất điểm cũng như vận tốc của chất điểm ở thời điểm này.

6) Bài tập 6

Một chiếc tàu hỏa chuyển động trên một đoạn đường có bán kính cong $\rho = 600(m)$. Xác định gia tốc và quãng đường đi được của tàu sau 5 phút, biết phương trình chuyển động: $S = 10^5 \left(e^{\frac{1}{2000}t} - 1 \right) + 50t$

7) Bài tập 7

Một chất điểm trên vành vô lăng bán kính $R = 2(m)$, lúc lấy đà chuyển động theo phương trình $S = 0,1t^3$. Xác định gia tốc tiếp tuyến và gia tốc pháp tuyến của điểm khi vận tốc của nó đạt được $V = 30\left(\frac{m}{s}\right)$?

8) Bài tập 8

Con tàu chuyển động chậm dần đều theo cung tròn bán kính $R = 800(m)$ và di chuyển được trên một đoạn đường $S = 800(m)$, với vận tốc ban đầu $V_0 = 54\left(\frac{km}{h}\right)$ và vận tốc cuối $V_1 = 18\left(\frac{km}{h}\right)$. Tính gia tốc con tàu ở đầu và cuối đoạn đường, và thời gian cần thiết để con tàu đi hết đoạn đường đó?

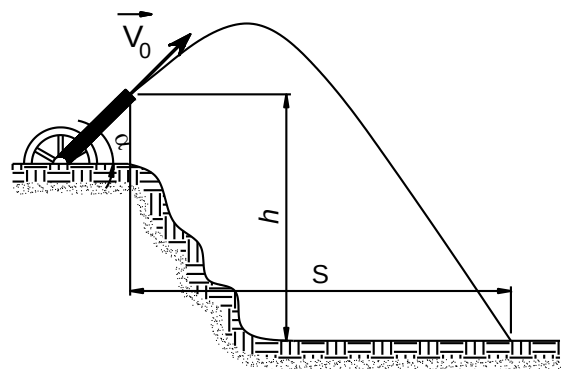
9) Bài tập 9

Một tàu hỏa chuyển động gia tốc đều, vận tốc của nó tăng từ $18\left(\frac{km}{h}\right)$ đến $72\left(\frac{km}{h}\right)$ trong khoảng thời gian 2 phút. Quãng đường nằm trên một vòng cung bán kính $1000(m)$. Xác định luật chuyển động, vận tốc, gia tốc của tàu hỏa sau 10 giây kể từ lúc chuyển động gia tốc đều?

10) Bài tập 10

Từ một khẩu pháo của pháo binh đặt trên bờ với độ cao $h = 30(m)$ so với mặt biển, bắn một phát súng dưới một góc $\alpha = 45^\circ$ so với phương ngang, với vận tốc ban đầu của đạn là $V_0 = 1000\left(\frac{m}{s}\right)$.

Hãy xác định khoảng cách S theo phương ngang từ miệng pháo tới đích viên đạn rơi xuống trên mặt nước biển. Bỏ qua sức cản của không khí.



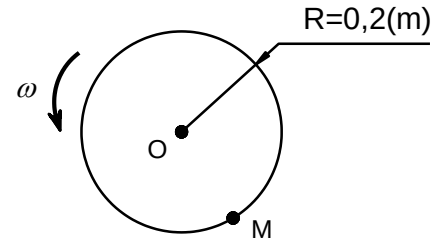
Chương 5

CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN

A. VÍ DỤ

1) Ví dụ 1

Một trục có bán kính $R = 0,2(m)$ quay nhanh dần đều từ trạng thái tĩnh, sau 10 giây trục quay được 50 vòng.



Hãy xác định:

- Vận tốc góc và gia tốc góc của trục tại $t = 10(s)$
- Vận tốc, gia tốc của điểm M trên vành khi $t = 10(s)$

Bài giải

- Vận tốc góc và gia tốc góc của trục tại $t = 10(s)$
- Từ phương trình chuyển động quay nhanh dần đều:

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \varepsilon t \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2 \end{cases}$$

- Ban đầu khi trục đứng yên ta có $\begin{cases} \omega_0 = 0 \\ \varphi_0 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega = \omega_0 + \varepsilon t = \varepsilon t \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2 = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 \end{cases}$$

- Khi $t = 10(s)$ trục quay được $\varphi = 50(vg) = 2\pi \cdot 50 = 100\pi(rad)$

$$\Leftrightarrow 100\pi = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot 10^2$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 2\pi \left(\frac{rad}{s^2} \right)$$

- Từ đó ta tính được $\omega = \varepsilon t = 2\pi \cdot 10 = 20\pi \left(\frac{rad}{s} \right)$

$$\text{- Kết luận: } \begin{cases} \omega = 20\pi \left(\frac{rad}{s} \right) \\ \varepsilon = 2\pi \left(\frac{rad}{s^2} \right) \end{cases}$$

- Vận tốc góc, gia tốc góc của điểm M trên vành khi $t = 10(s)$
- Vận tốc của điểm M trên vành:

$$V = R\omega = 0,2 \times 20\pi = 4\pi \left(\frac{m}{s} \right)$$

- Gia tốc của điểm M trên vành:

$$\begin{cases} W_M^t = R.\varepsilon = 0,2 \times 2\pi = 0,4\pi \left(\frac{m}{s^2} \right) \\ W_M^n = R.\omega^2 = 0,2 \times (20\pi)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{m}{s^2} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow W = \sqrt{(W_M^t)^2 + (W_M^n)^2} = 0,4\pi\sqrt{101} \left(\frac{m}{s^2} \right)$$

2) Ví dụ 2

Một trục máy trong giai đoạn mở máy quay nhanh dần đều. Sau khoảng thời gian 5 phút đạt vận tốc góc $n = 120 \left(\frac{vg}{ph} \right)$. Hãy tính gia tốc góc của trục và số vòng quay của trục trong thời gian đó?

Bài giải

- Trục quay nhanh dần đều nên ta áp dụng phương trình của vật rắn quay nhanh dần:

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \varepsilon.t \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0.t + \frac{1}{2}\varepsilon.t^2 \end{cases}$$

- Tại thời điểm ban đầu: $\begin{cases} \omega_0 = 0 \\ \varphi_0 = 0 \end{cases}$

- Thay vào phương trình trên $\Rightarrow \begin{cases} \omega = \omega_0 + \varepsilon.t = \varepsilon.t \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0.t + \frac{1}{2}\varepsilon.t^2 = \frac{1}{2}\varepsilon.t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon = \frac{\omega}{t} \\ \varphi = \frac{1}{2}\varepsilon.t^2 \end{cases}$

- Sau 5 phút, vận tốc góc đạt $n = 120 \left(\frac{vg}{ph} \right)$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\pi n}{30} = 4\pi \left(\frac{rad}{s} \right) \Rightarrow \varepsilon = \frac{4\pi}{300} = \frac{\pi}{75} \left(\frac{rad}{s^2} \right)$$

- Góc quay: $\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon.t^2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{75} \times 300^2 = 600\pi (rad)$

- Số vòng quay N được tính theo công thức:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{600\pi}{2\pi} = 300 (vg)$$

- Kết luận: Sau thời gian 5 phút, trục quay được 300 vòng.

B. BÀI TẬP ỨNG DỤNG

1) Bài tập 1

Cho phương trình chuyển động của một Pu-li động cơ điện theo luật:

$$\varphi = \pi t^3 \quad \text{trong đó: } \varphi \text{ tính bằng } (rad), t \text{ tính bằng giây.}$$

Hãy xác định:

- Vận tốc góc của Pu-li tại thời điểm $t = 3(s)$
- Gia tốc góc của Pu-li tại thời điểm $t = 3(s)$

2) Bài tập 2

Một bánh xe có vận tốc góc ban đầu $\omega_0 \left(\frac{rad}{s} \right)$ quay được $n(vg)$ thì dừng lại vì ma sát ở trục. Giả thiết bánh xe quay chậm dần đều. Tính gia tốc của nó?

Chương 6

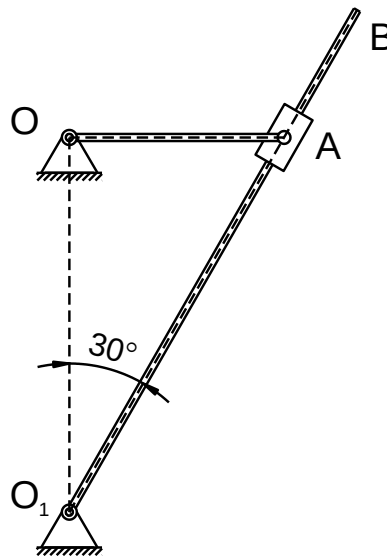
CHUYỂN ĐỘNG TỔNG HỢP

A. VÍ DỤ

1) Ví dụ 1 – Bài toán chuyển động tổng hợp của điểm

Cho cơ cấu tay quay con trượt có tay quay OA chuyển động quay tròn quanh O, con trượt A chuyển động tịnh tiến dọc thanh O_1B . Biết $\omega_0, \varepsilon_0 = 0; OA = R$

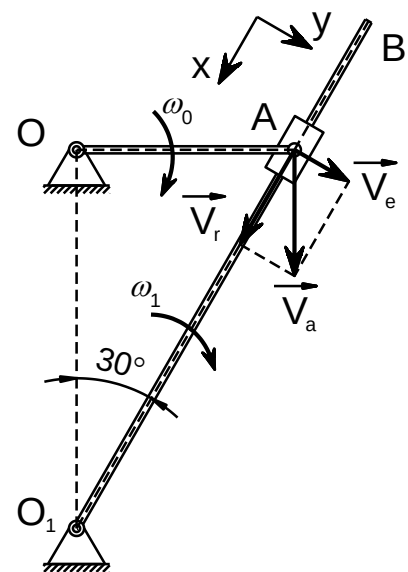
Tính vận tốc góc và gia tốc góc thanh O_1B tại thời điểm cơ cấu có vị trí như hình vẽ?



Bài giải

- Chọn thanh O_1B làm hệ động
- Phân tích chuyển động
 - Chuyển động tuyệt đối: Là chuyển động của con trượt A quay quanh O
 - Chuyển động tương đối: Là chuyển động tịnh tiến của con trượt A dọc theo O_1B
 - Chuyển động kéo theo: Là chuyển động của con trượt A quay quanh O_1
- Giải bài toán vận tốc
 - Định lý hợp vận tốc:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e (*)$$
 - Phân tích các véc tơ:



$$\vec{V}_a \begin{cases} \text{Phương: Vuông góc với OA} \\ \text{Chiều: Thuận theo chiều quay của } \omega_0 \\ \text{Trị số: } V_a = OA.\omega_0 = R.\omega_0 \end{cases}$$

$$\vec{V}_r \begin{cases} \text{Phương: Dọc theo } O_1B \\ \text{Chiều: Xác định theo } \vec{V}_a \\ \text{Trị số: Chưa biết} \end{cases}$$

$$\vec{V}_e \begin{cases} \text{Phương: Vuông góc với } O_1B \\ \text{Chiều: Thuận theo chiều quay của } \omega_1 \\ \text{Trị số: } V_e = O_1A.\omega_1 = 2R.\omega_1 \end{cases}$$

- Chiều phương trình (*) lên các trục x, y ta được:

$$\begin{cases} O_x : V_a \cos 30^\circ = V_r + 0 \\ O_y : V_a \sin 30^\circ = 0 + V_e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_r = \frac{\sqrt{3}}{2} R\omega_0 \\ \omega_1 = \frac{1}{4} \omega_0 \end{cases}$$

• Giải bài toán gia tốc

- Định lý hợp gia tốc:

$$\begin{aligned} \vec{W}_a &= \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_k \\ \Leftrightarrow \vec{W}_a^t + \vec{W}_a^n &= \vec{W}_r + \vec{W}_e^t + \vec{W}_e^n + \vec{W}_k (***) \end{aligned}$$

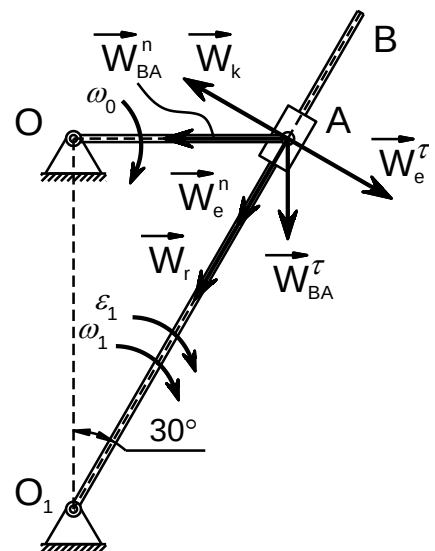
- Phân tích các véc tơ:

$$\vec{W}_a^t \begin{cases} \text{Phương: Vuông góc với OA} \\ \text{Chiều: Thuận theo chiều quay } \varepsilon_0 \\ \text{Trị số: } W_a^t = R\varepsilon_0 \end{cases}$$

$$\vec{W}_a^n \begin{cases} \text{Phương: Dọc theo OA} \\ \text{Chiều: Hướng về tâm O} \\ \text{Trị số: } W_a^n = R\omega_0^2 \end{cases}$$

$$\vec{W}_r \begin{cases} \text{Phương: Dọc theo } O_1B \\ \text{Chiều: Hướng về tâm } O_1 \\ \text{Trị số: Chưa biết} \end{cases}$$

$$\vec{W}_e^t \begin{cases} \text{Phương: Vuông góc với } O_1B \\ \text{Chiều: Thuận theo chiều quay } \varepsilon_1 \\ \text{Trị số: } W_e^t = 2R\varepsilon_1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \vec{W}_e^n \left\{ \begin{array}{l} \text{Phương: Dọc theo } O_1B \\ \text{Chiều: Hướng về tâm } O_1 \\ \text{Trị số: } W_e^n = 2R\omega_1^2 \end{array} \right. \\ \vec{W}_k \left\{ \begin{array}{l} \text{Phương: Vuông góc với } O_1B \\ \text{Chiều: Xác định theo } \vec{V}_r \\ \text{Trị số: } W_k = 2\omega_1 V_r \end{array} \right. \end{cases}$$

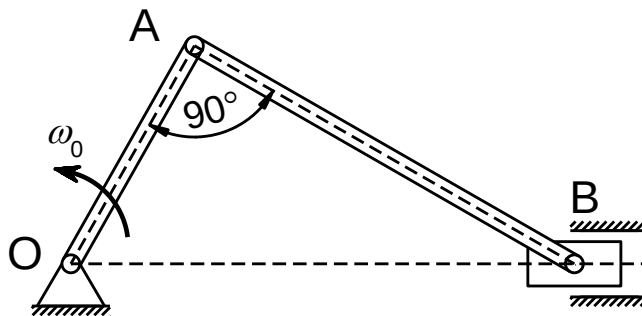
- Chiều phương trình (**) lên trục x, y :

$$\begin{cases} O_x : 0 + R\omega_0^2 \sin 30^\circ = W_r + 0 + 2R\omega_1^2 + 0 \\ O_y : 0 - R\omega_0^2 \cos 30^\circ = 0 + 2R\varepsilon_1 + 0 - 2\omega_1 V_r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W_r = \frac{3R}{8} \omega_0^2 \\ \varepsilon_1 = \frac{\sqrt{3}}{8} \omega_0^2 \end{cases}$$

2) Ví dụ 2 – Chuyển động song phẳng

Cho cơ cấu tay quay quay con trượt có OA quay quanh O theo luật $\varphi = 3t$ (φ tính bằng rad, t tính bằng giây).

Hãy xác định vận tốc của con trượt B tại thời điểm $OAB = 90^\circ$. Biết $OA = 0,5(m)$; $AB = 0,865(m)$.



Bài giải

- Tay quay OA quay quanh O với vận tốc góc $\omega_0 = \varphi'(t) = 3 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$
- Phân tích chuyển động
 - Điểm A chuyển động quay quanh O với vận tốc góc ω_0 nên vận tốc của điểm A có thể xác định được:

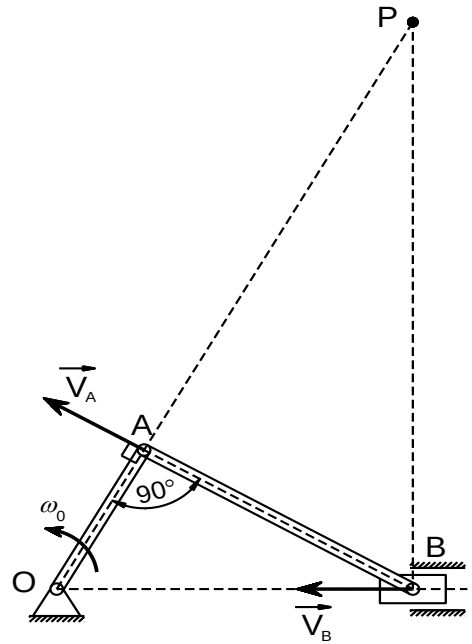
$$\vec{V}_A \left\{ \begin{array}{l} \text{Phương: Vuông góc với OA} \\ \text{Chiều: Thuận theo chiều quay } \omega_0 \\ \text{Trị số: } V_A = OA \cdot \omega_0 \end{array} \right.$$

- Con trượt B chuyển động tịnh tiến dọc theo OB với vận tốc $\vec{V}_B$ như sau:

$$\vec{V}_B \begin{cases} \text{Phương: Dọc theo OB} \\ \text{Chiều: Thuận theo chiều quay } \omega_0 \\ \text{Trị số: Chưa biết} \end{cases}$$

- Thanh AB chuyển động song phẳng.
- Xác định vận tốc của điểm B bằng bài toán tìm tâm vận tốc tức thời P: Do đã biết vận tốc điểm A và phương vận tốc điểm B nên ta có thể áp dụng phương pháp xác định tâm vận tốc tức thời P như đã nói ở trên.

- Từ A và B kẻ các đường thẳng vuông góc với $\vec{V}_A, \vec{V}_B$ chúng cắt nhau tại P là tâm vận tốc tức thời.



- Từ đó ta có:

$$\begin{cases} V_A = AP \cdot \omega_{AB} = OA \cdot \omega_0 \\ V_B = BP \cdot \omega_{AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{AB} = \frac{OA}{AP} \omega_0 \\ V_B = BP \cdot \frac{OA}{AP} \omega_0 (*) \end{cases}$$

- Tính AP và BP theo quy tắc tam giác đồng dạng: $\triangle APB$ đồng dạng với $\triangle ABO$
- Suy ra:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{BP}{OB} \Rightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{OB}{AB}$$

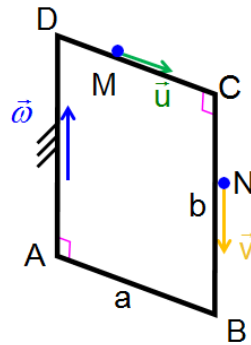
- Thay biểu thức trên vào phương trình (*) và $OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = 1(m)$

$$V_B = BP \cdot \frac{OA}{AP} \omega_0 = \frac{OB}{AB} \times OA \times \omega_0 = \frac{1}{0,865} \times 0,5 \times 3 = 1,73 \left(\frac{m}{s} \right)$$

B. BÀI TẬP TỔNG HỢP (CÓ GỢI Ý LỜI GIẢI)

1) Bài tập 1

Cho cơ hệ như hình vẽ. Biết: $u, v, \omega, a, DM = \ell < a$. Hãy phân tích chuyển động phức hợp của các điểm: M và N. Xác định gia tốc Coriolis của các điểm: M và N.



Hướng dẫn:

*** Phân tích chuyển động phức hợp của điểm M và N:**

+ *Chuyển động kéo theo*: Quay cùng với khung quanh trục AD cố định với vận tốc góc. Do đó:

$$\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_{\text{khung}} = \vec{\omega}$$

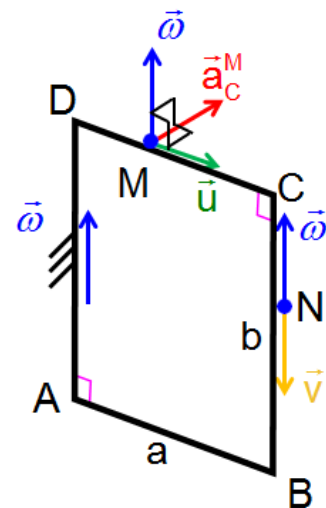
+ *Chuyển động tương đối*: là chuyển động thẳng điểm M dọc cạnh DC, và chuyển động thẳng điểm N dọc cạnh CB. Do đó:

$$\begin{cases} \vec{v}_r^M = \vec{u} \\ \vec{v}_r^N = \vec{v} \end{cases}$$

*** Xác định gia tốc Coriolis của điểm M:**

$$\vec{a}_C^M = 2(\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r^M) = 2(\vec{\omega} \wedge \vec{u})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_C^M \perp \text{mp}(\vec{\omega}, \vec{u}) = \text{mp}(ABCD) \\ \text{chiều } \vec{a}_C^M : \text{RHR} \\ |\vec{a}_C^M| = 2(\omega \cdot u \cdot \sin 90^\circ) = 2 \cdot \omega \cdot u \end{cases}$$

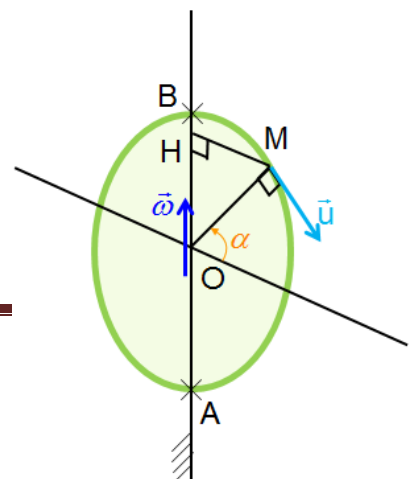


*** Xác định gia tốc Coriolis của điểm N:**

$$\vec{a}_C^N = 2(\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r^N) = 2(\vec{\omega} \wedge \vec{v})$$

$$\text{Vì } |\vec{a}_C^N| = 2 \cdot \omega \cdot v \cdot \sin 180^\circ = 0 \Rightarrow \vec{a}_C^N = \vec{0}$$

2) Bài tập 2



Cho một đường tròn bán kính R quay quanh đường kính AB cố định với vận tốc góc ω . Điểm M chuyển động dọc trên đường tròn ấy với vận tốc. Biết R, α, u, ω .

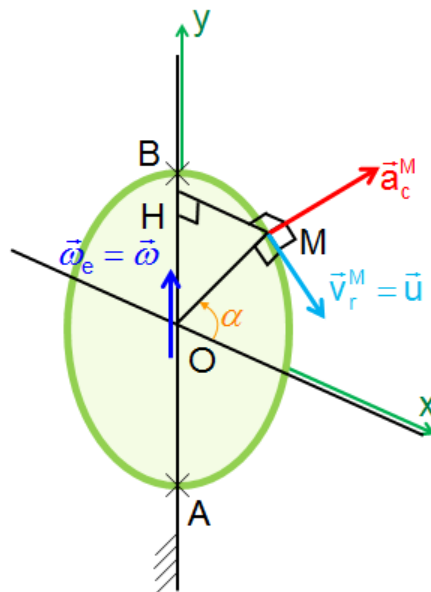
a. Hãy xác định vector gia tốc Coriolis của điểm M . Tìm vị trí điểm M trên đường tròn để:

$$|\vec{a}_C^M|_{\max}; \quad |\vec{a}_C^M|_{\min}$$

Hướng dẫn:

+ Chuyển động kéo theo: quay cùng với đường tròn quanh đường kính cố định AB , với vận tốc góc ω . Do đó: $\omega_e = \omega$.

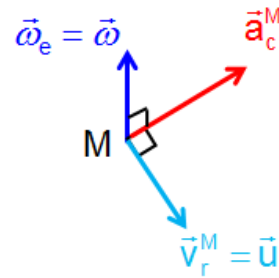
+ Chuyển động tương đối: chuyển động của điểm M theo quỹ đạo là đường tròn đường kính AB với vận tốc u . Do đó: $v_r^M = u$.



- Xác định $\vec{a}_C^M$:

$$\vec{a}_C^M = 2(\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r^M) = 2(\vec{\omega} \wedge \vec{u})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_C^M \perp \text{mp}(\vec{\omega}, \vec{u}) \\ \text{chiều } \vec{a}_C^M: \text{RHR} \\ |\vec{a}_C^M| = 2(\omega \cdot u \cdot |\sin \alpha|) \end{cases}$$



b. Xác định điểm M:

- $|\vec{a}_C^M|_{\min} = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0^\circ \\ \alpha = 180^\circ \end{cases}$
- $|\vec{a}_C^M|_{\max} = 2 \cdot \omega \cdot u \Leftrightarrow |\sin \alpha| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 90^\circ \\ \alpha = 270^\circ \end{cases}$

3) Bài tập 3

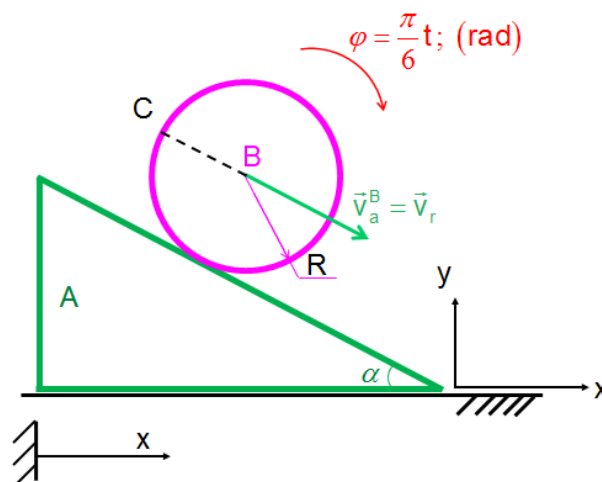
Cho một cơ hệ như hình vẽ. Cho: $R, \alpha = 30^\circ$.

a. Tam giác A được giữ cố định. Đĩa B lăn không trượt trên mặt nghiêng với

phương trình chuyển động: $\varphi = \frac{\pi}{6}t$. Hãy xác định vector vận tốc và vector gia tốc

tuyệt đối của điểm C trên vành ngoài của đĩa (BC song song với cạnh huyền của tam giác A)?

b. Trong lúc đĩa B đang lăn thì tam giác A trượt theo phương ngang với quy luật: $x = v_0 t$ ($v_0 = \text{const}$). Hãy xác định vector vận tốc và vector gia tốc tuyệt đối của tâm B đĩa?



Hướng dẫn:

a)

*** Bài toán vận tốc:**

Vì đĩa lăn không trượt trên dốc cố định nên đĩa chuyển động song phẳng với tâm vận tốc tức thời là tiếp điểm P

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{\pi}{6} \text{ s}^{-1} = \text{const}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \dot{\omega} = 0 \text{ s}^{-2}$$

$$\Rightarrow v_a^B = R \cdot \omega = \frac{\pi}{6} R = \text{const}$$

Ta có: $\vec{v}_a^B = \text{const}$

Vậy điểm B chuyển động thẳng đều.

$$\Rightarrow \vec{a}_a^B = \vec{0}$$

$$v_a^C = PC \cdot \omega = \sqrt{2} \cdot R \cdot \omega = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{6} R \Rightarrow \begin{cases} v_{ax}^C = v_a^C \cdot \cos \beta \approx 0,715R \\ v_{ay}^C = v_a^C \cdot \sin \beta \approx 0,192R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_a^C = v_{ax}^C \cdot \vec{i} + v_{ay}^C \cdot \vec{j}$$

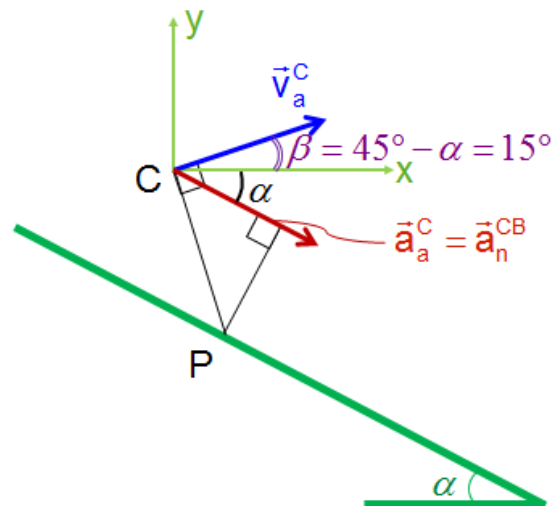
$$\approx R(0,715\vec{i} + 0,192\vec{j})$$

*** Bài toán gia tốc**

- Chọn điểm B làm cực để tính gia tốc điểm C:

$$\vec{a}_a^C = \vec{a}_a^B + \vec{a}^{CB} = \vec{a}^{CB}$$

$$= \vec{a}_\tau^{CB} + \vec{a}_n^{CB} = \vec{a}_n^{CB}$$



$$\text{Với: } \begin{cases} a_{\tau}^{CB} = \varepsilon \cdot BC = 0 \text{ m/s}^2 \\ a_n^{CB} = \omega^2 \cdot BC = \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \cdot R \simeq 0,27 \cdot R \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} a_{ax}^C = a_a^C \times \cos \alpha \simeq 0,234 \cdot R \\ a_{ay}^C = -a_a^C \times \sin \alpha \simeq -0,135 \cdot R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_a^C = a_{ax}^C \cdot \vec{i} + a_{ay}^C \cdot \vec{j} \simeq R(0,234 \cdot \vec{i} - 0,135 \cdot \vec{j})$$

b. Tam giác A chuyển động tịnh tiến thẳng theo phương ngang với quy luật:

$$x = v_0 t \Rightarrow v_a^A = \dot{x} = v_0 = \text{const} \Rightarrow \vec{v}_a^A = v_0 \vec{i} = \overrightarrow{\text{const}} \\ \Rightarrow \vec{a}_a^A = \dot{\vec{v}}_a^A = \vec{0}$$

* Phân tích chuyển động phức hợp của tâm B:

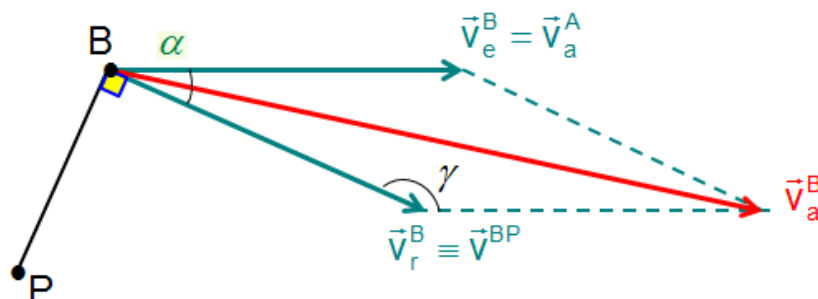
- Chuyển động kéo theo: tịnh tiến cùng với tam giác A.
- Chuyển động tương đối: lăn không trượt trên mặt nghiêng tam giác A.

+ Bài toán vận tốc:

$$\vec{v}_a^B = \vec{v}_e^B + \vec{v}_r^B$$

$$\text{Với } \begin{cases} \vec{v}_e^B \equiv \vec{v}_a^{B*} = \vec{v}_a^A \Rightarrow |\vec{v}_e^B| = v_0 = \text{const} \\ \vec{v}_r^B \equiv \vec{v}^{BP} \Rightarrow |\vec{v}_r^B| = R \cdot \omega = \text{const} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_a^B = \vec{v}_e^B + \vec{v}_r^B = \vec{v}_a^A + \vec{v}^{BP}$$



$$\begin{aligned}
 |\vec{v}_a^B| &= \sqrt{(v_a^A)^2 + (v^{BP})^2 - 2 \times v_a^A \times v^{BP} \times \cos \gamma} \\
 &= \sqrt{(v_a^A)^2 + (v^{BP})^2 + 2 \times v_a^A \times v^{BP} \times \cos \alpha} \\
 &= \sqrt{v_o^2 + R^2 \omega^2 + \sqrt{3} R \omega \times v_o} \\
 \Rightarrow &\begin{cases} v_{ax}^B = v_a^A + v^{BP} \cdot \cos \alpha = v_o + R \omega \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ v_{ay}^B = -v^{BP} \cdot \sin \alpha = -\frac{1}{2} R \omega \end{cases} \\
 \Rightarrow \vec{v}_a^B &= \left(v_o + \frac{\sqrt{3}}{2} R \omega \right) \vec{i} - \frac{1}{2} R \omega \cdot \vec{j}
 \end{aligned}$$

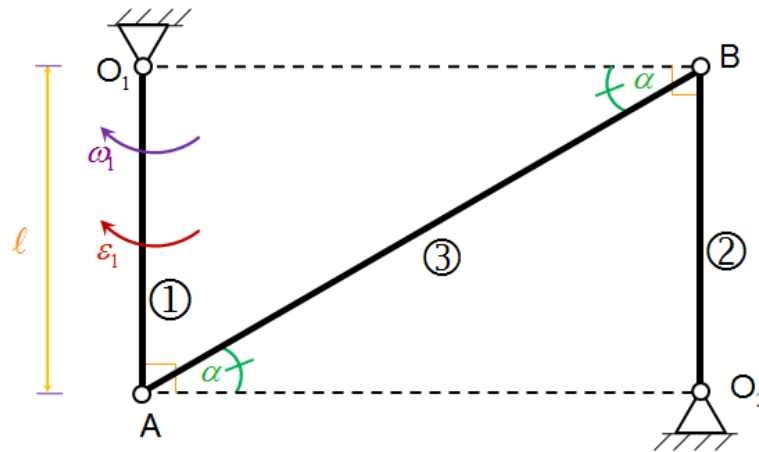
+ Bài toán gia tốc:

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_a^B &= \vec{a}_e^B + \vec{a}_r^B + \vec{a}_C^B \\
 \vec{a}_e^B &= \vec{a}_a^{B*} = \vec{a}_a^A = \vec{0} \\
 \text{Vô} &\vec{a}_r^B = \dot{\vec{v}}_r^B = \vec{0} \\
 \vec{a}_C^B &= 2(\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r^B) = \vec{0}, \vec{\omega}_e = \vec{0} \\
 \Rightarrow \vec{a}_a^B &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

4) Bài tập 4

Cho cơ hệ như hình vẽ. Biết: $O_1A \parallel O_2B$; $O_1A = O_2B = \ell = 0,4 \text{ m}$; $\alpha = 30^\circ$; O_1AO_2B là hình chữ nhật; $\omega_1 = 1 \text{ s}^{-1}$; $\varepsilon_1 = 1 \text{ s}^{-2}$

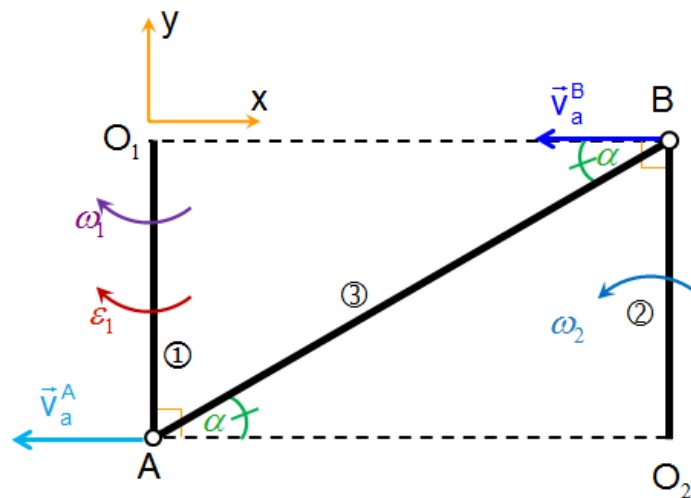
- Hãy phân tích chuyển động của các vật rắn trong hệ.
- Xác định vận tốc góc của vật rắn 2 và vật rắn 3.
- Xác định gia tốc góc của vật rắn 2 và vật rắn 3.



Hướng dẫn:

a. Phân tích:

- + Tay quay O_1A quay nhanh dần, theo chiều kim đồng hồ quanh tâm O_1 cố định.
- + Thanh truyền AB chuyển động song phẳng trong mặt phẳng hình vẽ.
- + Thanh O_2B chuyển động quay quanh tâm O_2 cố định.



b. Bài toán vận tốc:

- + Vận tốc điểm A thuộc vật 1:

$$v_a^A = O_1A \cdot \omega_1 = 0,4 \left(\frac{m}{s} \right)$$

- + Phương của vector vận tốc điểm B phải vuông góc với bán kính O_2B .

$$\vec{v}_a^B \perp O_2B$$

- + Tâm vận tốc tức thời của thanh AB : $P \rightarrow \infty$. Thanh AB tịnh tiến tức thời.

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_a^B = \vec{v}_a^A \\ \omega_{\textcircled{3}} = \omega_{AB} = 0 \text{ s}^{-1} \end{cases}$$

+ Vận tốc góc của thanh O_2B :

$$\begin{aligned} v_a^B &= O_2B \cdot \omega_2 \\ \Rightarrow \omega_2 &= \frac{v_a^B}{O_2B} = \frac{v_a^A}{\ell} = \omega_1 = 1 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

c. Bài toán gia tốc:

* Gia tốc điểm A thuộc thanh O_1A :

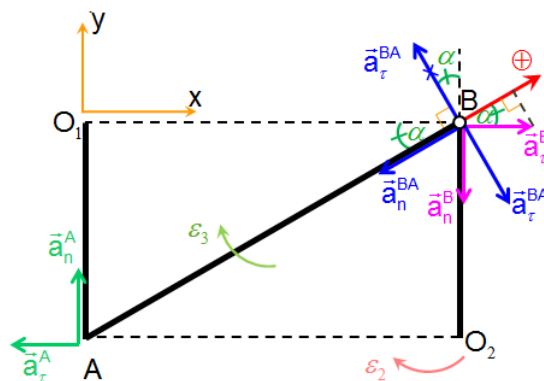
$$\vec{a}_a^A = \vec{a}_\tau^A + \vec{a}_n^A$$

Vô hướng

$$\begin{cases} a_\tau^A = O_1A \cdot \varepsilon_1 = 0,4 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \\ a_n^A = O_1A \cdot \omega_1^2 = 0,4 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \end{cases}$$

* Chọn A làm cực để tính gia tốc điểm B thuộc thanh AB.

$$\vec{a}_a^B = \vec{a}_a^A + \vec{a}^{BA} = \left(\vec{a}_\tau^A + \vec{a}_n^A \right) + \left(\vec{a}_\tau^{BA} + \vec{a}_n^{BA} \right) \quad (1)$$



Mặt khác:

$$\vec{a}_a^B = \vec{a}_\tau^B + \vec{a}_n^B \quad (2)$$

+ Đồng nhất hai phương trình (1) và (2) ta có:

$$(*) \quad \vec{a}_\tau^B + \vec{a}_n^B = (\vec{a}_\tau^A + \vec{a}_n^A) + (\vec{a}_\tau^{BA} + \vec{a}_n^{BA})$$

Phương chiều	$\perp O_2B$	$\uparrow\uparrow \overrightarrow{BO_2}$		$\perp \overrightarrow{O_1A}$	$\uparrow\uparrow \overrightarrow{AO_1}$	$\perp AB$	$\uparrow\uparrow \overrightarrow{BA}$
Độ lớn	?	$\underbrace{\omega_2^2 \cdot O_2B}_{0,4\text{m/s}^2}$		0,4m/s ²	0,4m/s ²	?	$\underbrace{\omega_{AB}^2 \cdot AB}_0$

+ Chiều (*) lên trục (y):

$$0 - 0,4 = (0 + 0,4) + (\vec{a}_\tau^{BA} \cdot \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_\tau^{BA} = \frac{-0,8}{\cos \alpha} \approx -0,92 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) < 0$$

$\Rightarrow$ Ngược chiều.

* Gia tốc góc thanh AB:

$$\vec{a}_\tau^{BA} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$$

$$AB = \frac{O_1A}{\sin \alpha} = 0,8 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{AB} = \varepsilon_3 = \frac{\vec{a}_\tau^{BA}}{AB} \approx \frac{0,92}{0,8} \approx 1,15 (\text{s}^{-2})$$

+ Chiều (*) lên AB:

$$\vec{a}_\tau^B \cdot \cos \alpha - 0,4 \cdot \sin \alpha = (-0,4 \cdot \cos \alpha + 0,4 \cdot \sin \alpha) + 0$$

$$\Rightarrow \vec{a}_\tau^B = -0,4 + 0,8 \cdot \tan \alpha \approx 0,062 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) > 0$$

$\Rightarrow$ chiều đã chọn đúng.

+ Gia tốc góc thanh O_2B :

$$\vec{a}_\tau^B = \varepsilon_2 \cdot O_2B$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{\vec{a}_\tau^B}{O_2B} ; \frac{0,062}{0,4} \approx 0,155 (\text{s}^{-2})$$

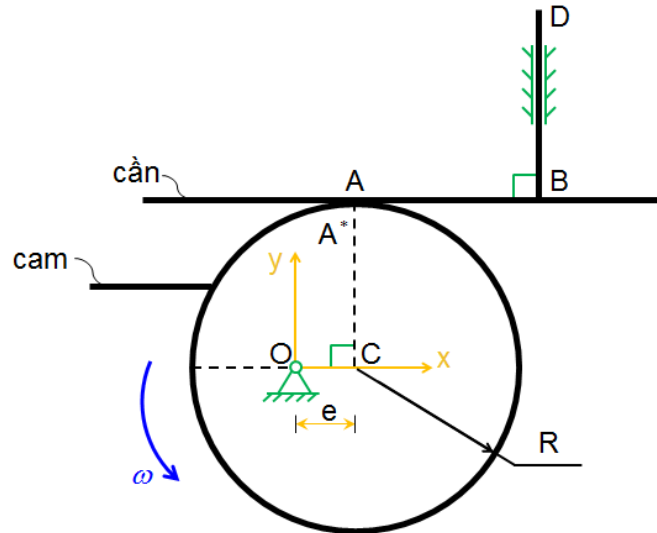
Vì ε_2 ngược chiều $\omega_2 \Rightarrow O_2B$ quay chậm dần.

5) Bài tập 5

Cho cơ hệ như hình vẽ. Cho: $\omega = \text{const}$. $OC = e$.

Giả sử rằng cần A,B,C luôn tiếp xúc vào đĩa tròn.

- Phân tích chuyển động của các vật rắn trong hệ. Phân tích chuyển động phức hợp của điểm A thuộc cần?
- Xác định vận tốc của cần?
- Xác định gia tốc của cần?



Hướng dẫn:

- Phân tích chuyển động của các vật rắn trong hệ:

- + Cam chuyển động quay đều quanh tâm O cố định.
- + Cần chuyển động tịnh tiến thẳng đứng.

- * Phân tích chuyển động phức hợp của A thuộc cần:

- + Chuyển động kéo theo: quay cùng với cam quanh tâm O cố định.
- + Chuyển động tương đối: trượt dọc trên bề mặt tròn của cam.

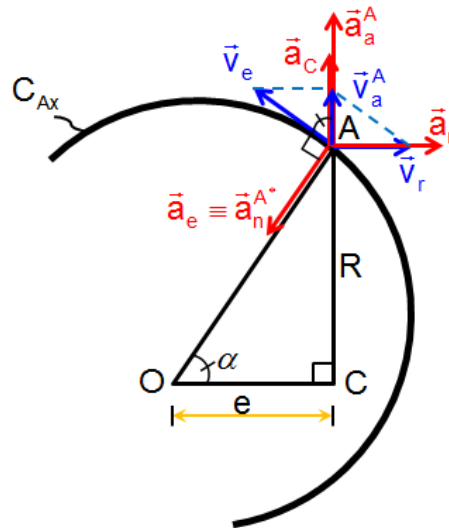
- Bài toán vận tốc.

+ Áp dụng định lý hợp vận tốc của điểm chuyển động phức hợp ta có thể tính được vectơ vận tốc của điểm thuộc cần như sau:

$$\vec{v}_a^A = \vec{v}_e = \vec{v}_r$$

$$OA = \sqrt{R^2 + e^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_e \equiv \vec{v}_a^{A^*} \\ A^* \in \text{cam} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_e \equiv \vec{v}_a^{A^*} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$$



$$\Rightarrow \vec{v}_e \perp mp(\vec{\omega}, \overline{OA})$$

+ Chiều $\vec{V}_e$ xác định theo quy tắc :RHR (bàn tay phải).

$$|\vec{v}_e| = \omega.OA.\sin 90^\circ = \sqrt{R^2 + e^2}.\omega$$

$$\vec{V}_a^A = \vec{V}_e + \vec{V}_r \quad (1)$$

Phương Chiều	//y	$\perp OA$	//x
Độ lớn	?	$\sqrt{R^2 + e^2}.\omega$	?

+ Chiều (1) lên trục (y):

$$v_a^A = v_e.\cos \alpha = \frac{\sqrt{R^2 + e^2}.\cos \alpha}{\sqrt{R^2 + e^2}}.e$$

$$\Rightarrow v_a^A = e.\omega > 0$$

$$\text{Với: } \begin{cases} \sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + e^2}} \\ \cos \alpha = \frac{e}{\sqrt{R^2 + e^2}} \end{cases}$$

+ Chiều (1) lên trục (x):

$$0 = -v_e.\sin \alpha + v_r$$

$$\Rightarrow v_r = v_e.\sin \alpha$$

$$v_r = R.\omega > 0$$

c. Bài toán gia tốc.

+ Áp dụng định lý hợp gia tốc của điểm chuyển động phức hợp ta có thể tính được gia tốc của điểm A thuộc cần như sau:

$$\vec{a}_a^A = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

$$\text{Ta có: } \vec{a}_e = \vec{a}_a^{A^*} = \cancel{\vec{a}_r^{A^*}} + \vec{a}_n^{A^*} = \vec{a}_n^{A^*} \quad (\vec{a}_r^{A^*} = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OA^*} = \vec{0})$$

$$\text{Với: } \vec{a}_r // x$$

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r) = 2(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_c \perp \text{mp}(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r) & \Leftrightarrow \vec{a}_c // y \\ \text{Chiều } \vec{a}_c : \text{RHR} \\ |\vec{a}_c| = 2.\omega.v_r \end{cases}$$

$$\vec{a}_a^A = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \quad (2)$$

Phương Chiều	//y	$\uparrow\uparrow \overrightarrow{A^*O}$	//x	$\uparrow\uparrow y$
Độ lớn	?	$\sqrt{R^2 + e^2}.\omega^2$	?	$2R\omega^2$

+ Chiều (2) lên trục y:

$$a_a^A = -\sqrt{R^2 + e^2}.\omega^2 \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + e^2}} + 0 + 2R\omega^2$$

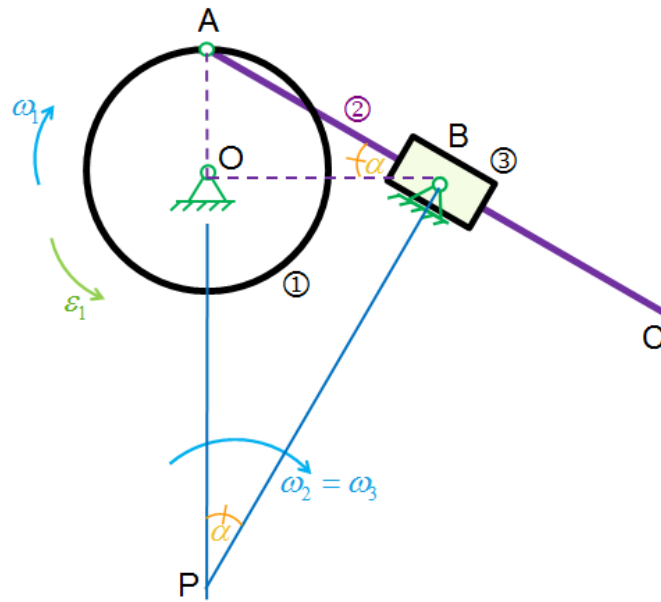
$$\Rightarrow a_a^A = R\omega^2 > 0$$

Kết luận: Cam quay đều, cần đang tịnh tiến nhanh dần.

6) Bài tập 6

Cho cơ hệ như hình vẽ. Cho: $OA = R$; $OA \perp OB$; $\alpha = 30^\circ$; $\omega_1^2 = \varepsilon_1$

- Phân tích chuyển động của các vật rắn trong hệ.
- Phân tích chuyển động phức hợp của điểm B thuộc thanh AC khi lấy con lắc 3 làm hệ động. Viết biểu thức tính vận tốc, gia tốc tuyệt đối của điểm B này?
- Xác định vận tốc góc của thanh AC và của con lắc 3.
- Xác định gia tốc góc của thanh AC và con lắc 3.



Hướng dẫn:

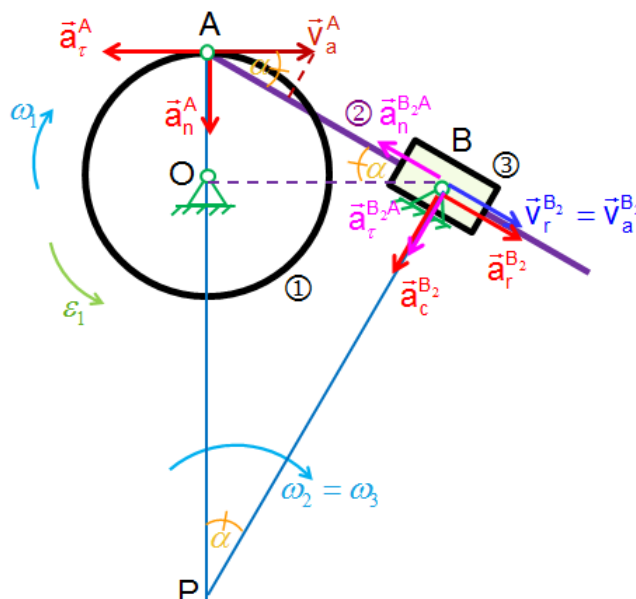
a. Phân tích chuyển động của các vật rắn trong hệ:

- + Đĩa tròn O quay chậm dần, theo chiều kim đồng hồ quanh tâm O cố định.
- + Thanh truyền AC chuyển động song phẳng trong mặt phẳng hình vẽ.
- + Con lắc (3) quay quanh B cố định.

Do thanh AC và con lắc 3 luôn trùng nhau trong suốt quá trình chuyển động nên $\omega_2 = \omega_3$ và $\epsilon_2 = \epsilon_3$.

b. Phân tích chuyển động phức của điểm B_2 thuộc thanh AC:

- + Chuyển động kéo theo: quay theo con lắc (3) quanh tâm B.



+ Chuyển động tương đối: chuyển động thẳng dọc theo phương đường thẳng AC. Ta có:

$$\vec{v}_r^{B_2} \subset AC; \quad \vec{a}_r^{B_2} \subset AC$$

Biểu thức tính vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của điểm B₂ là:

$$\begin{cases} \vec{v}_a^{B_2} = \vec{v}_e^{B_2} + \vec{v}_r^{B_2} \\ \vec{a}_a^{B_2} = \vec{a}_e^{B_2} + \vec{a}_r^{B_2} + \vec{a}_C^{B_2} \end{cases}$$

c. Bài toán vận tốc.

$$v_a^A = OA.\omega_1 = R.\omega_1$$

+ Xác định vận tốc tuyệt đối B₂

$$\vec{v}_a^{B_2} = \vec{v}_e^{B_2} + \vec{v}_r^{B_2}$$

$$\text{Vôùi } \vec{v}_e^{B_2} \equiv \vec{v}_a^{B_2^*} \equiv \vec{v}_a^{B_3} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_a^{B_2} = \vec{v}_r^{B_2}$$

+ Vận tốc góc của thanh AC:

- Chọn P làm cực cho bài toán vận tốc của AC.

$$\text{Ta có: } AB = \frac{R}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow PA = \frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow PB = \frac{AB}{\tan \alpha} = \frac{R}{\sin \alpha \cdot \tan \alpha}$$

$$v_a^A = PA.\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_a^A}{PA}$$

$$\text{Vậy } \omega_2 = \frac{R.\omega_1}{\frac{R}{\sin^2 \alpha}} = \omega_1 \cdot \sin^2 \alpha$$

+ Vận tốc của điểm B₂.

$$v_a^{B_2} = PB.\omega_2 = \frac{R}{\sin \alpha \cdot \tan \alpha} \omega_1 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow v_a^{B_2} = R\omega_1 \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow v_r^{B_2} = v_a^{B_2} = R\omega_1 \cdot \cos \alpha$$

+ Vận tốc góc của con lắc (3).

- Vì thanh AC và con lắc (3) có liên kết tịnh tiến nội: nên chuyển động quay của (3) giống hoàn toàn với thành phần chuyển động quay của thanh AC, nghĩa là:

$$\omega_3 = \omega_2$$

d. Bài toán gia tốc.

+ Gia tốc điểm A:

$$\vec{a}_a^A = \vec{a}_\tau^A + \vec{a}_n^A$$

$$\text{Với: } \begin{cases} \vec{a}_\tau^A = OA \cdot \varepsilon_1 = R \cdot \varepsilon_1 \\ \vec{a}_n^A = OA \cdot \omega_1^2 = R \cdot \omega_1^2 \end{cases}$$

+ Chọn A làm cực để tính gia tốc điểm B₂:

$$\begin{aligned} \vec{a}_a^{B_2} &= \vec{a}_a^A + \vec{a}^{B_2A} \\ &= (\vec{a}_\tau^A + \vec{a}_n^A) + (\vec{a}_\tau^{B_2A} + \vec{a}_n^{B_2A}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_a^{B_2} = (\vec{a}_\tau^A + \vec{a}_n^A) + (\vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n) \quad (1)$$

+ Mặt khác ta có thể tính gia tốc $\vec{a}_a^{B_2}$ theo định lý hợp gia tốc trong chuyển động phức hợp:

$$\vec{a}_a^{B_2} = \vec{a}_e^{B_2} + \vec{a}_r^{B_2} + \vec{a}_C^{B_2} \quad (2)$$

$$\text{Với: } \begin{cases} \vec{a}_e^{B_2} \equiv \vec{a}_a^{B_2^*} \equiv \vec{a}_a^{B_3} = \vec{0} \\ \vec{a}_r^{B_2} \subset AC \\ \vec{a}_C^{B_2} = 2(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r^{B_2}) = 2(\vec{\omega}_3 \wedge \vec{v}_a^{B_2}) \end{cases}$$

+ Đồng nhất hai công thức (1) và (2):

$$(\vec{a}_\tau^A + \vec{a}_n^A) + (\vec{a}_\tau^{B_2A} + \vec{a}_n^{B_2A}) = \vec{a}_r^{B_2} + \vec{a}_C^{B_2} \quad (3)$$

$\perp OA$	$\uparrow\uparrow \vec{OA}$	$\perp AB$	$\uparrow\uparrow \vec{BA}$	$// AC$	$\perp AC$
$R \cdot \varepsilon_1$	$R \omega_1^2$	?	$AB \cdot \omega_2^2$	?	$2\omega_3 \cdot v_a^{B_2}$

$$\begin{aligned} \text{Với: } AB \cdot \omega_2^2 &= \frac{R}{\sin \alpha} \omega_1^2 \cdot \sin^4 \alpha \\ &= R \cdot \omega_1^2 \cdot \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\omega_3 \cdot v_a^{B_2} &= 2\omega_1 \cdot \sin^2 \alpha \cdot R \cdot \omega_1 \cdot \cos \alpha \\ &= 2R \cdot \omega_1^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

+ Chiều (3) lên PB:

$$(-R\varepsilon_1 \sin \alpha - R\omega_1^2 \cos \alpha) + (-a_{BA}^r + 0) = 0 - 2R\omega_1^2 \cos \alpha \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow a_{BA}^r = -R\varepsilon_1 (\sin \alpha + \cos \alpha - 2 \cos \alpha \sin^2 \alpha)$$

$$a_{BA}^r = AB.\varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^r}{AB}$$

$$\text{Mà: } \varepsilon_{AB} = \frac{R.\varepsilon_1 (2 \cos \alpha \sin^2 \alpha - \sin \alpha - \cos \alpha) \sin \alpha}{R}$$

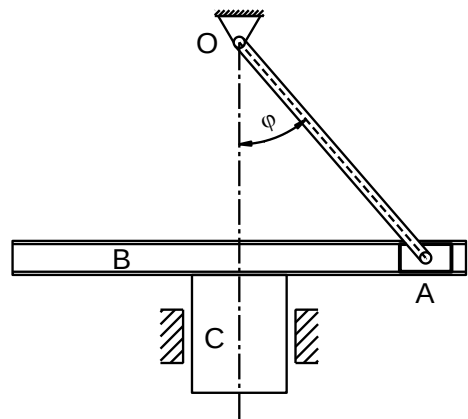
Vậy ta có: $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$

C. BÀI TẬP ỨNG DỤNG

1) Bài tập 1

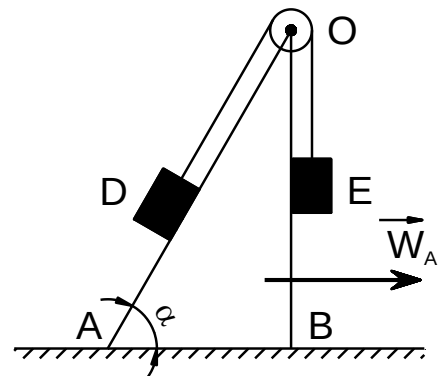
Một cơ cấu tay quay con trượt có $OA = 0,3(m)$ và quay đều quanh O với vận tốc góc $n = 150 \left(\frac{vg}{ph} \right)$. Khi OA quay, con trượt A chạy trong rãnh B làm cho thanh B cùng búa C chuyển động lên xuống.

Hãy tính vận tốc của búa và vận tốc chạy trên B của A tại thời điểm $\varphi = 60^\circ$.



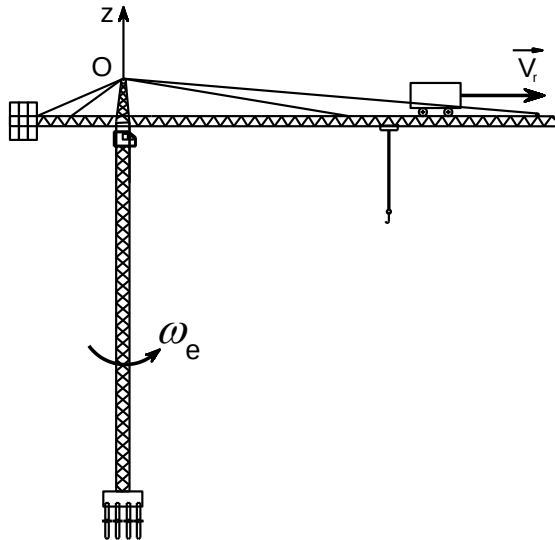
2) Bài tập 2

Lăng trụ tam giác OAB chuyển động tịnh tiến trên mặt ngang với gia tốc $W_A = 3 \left(\frac{m}{s^2} \right)$. Dọc theo mặt nghiêng, vật D trượt xuống theo luật $s = 2t^2$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây) nhờ liên kết dây vắt qua ròng rọc O làm vật E chuyển động theo phương thẳng đứng như hình vẽ. Hãy xác định gia tốc tuyệt đối của D và E tại $t = 2(s)$, cho $\alpha = 60^\circ$. Bỏ qua ma sát.



3) Bài tập 3

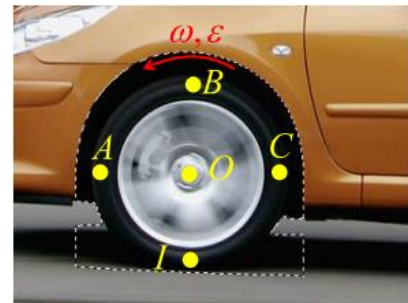
Xe con A của cần cầu chuyển động với vận tốc không đổi $V_r = 2 \left(\frac{m}{s} \right)$. Cần cầu quay quanh trục Oz với vận tốc góc không đổi $n = \frac{30}{\pi} \left(\frac{vg}{ph} \right)$. Hãy xác định gia tốc tuyệt đối của xe A khi $OA = 2(m)$.



4) Bài tập 4

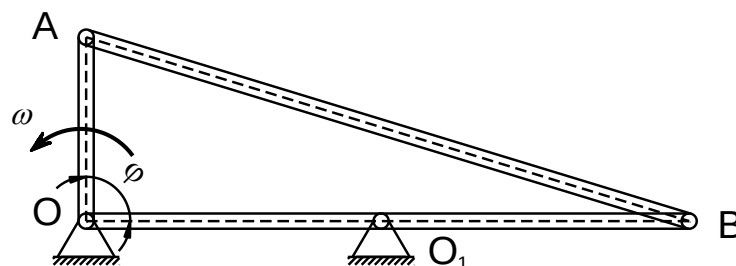
Cho bánh xe có bán kính $R = 0,5(m)$ lăn không trượt trên đường thẳng nằm ngang với vận tốc tâm O là $V_O = 12 \left(\frac{m}{s} \right)$.

Hãy xác định vận tốc các điểm A, B, C, I?



5) Bài tập 5

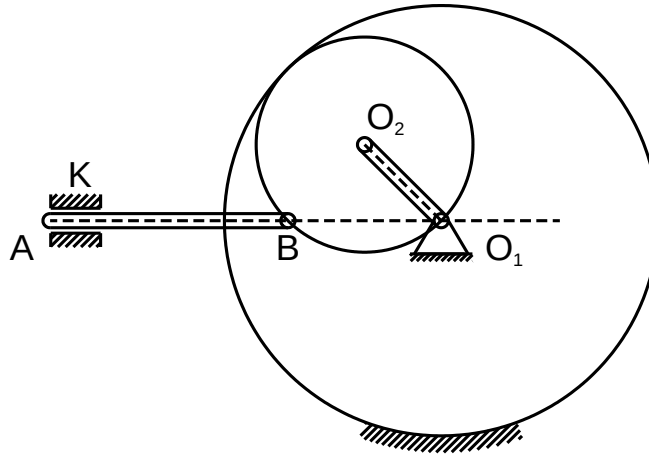
Hãy xác định vận tốc góc của thanh AB, tay quay O_1B của cơ cấu bốn thanh OA, AB, BO_1, O_1O (biết thanh O_1O cố định). Tại thời điểm $\varphi = 90^\circ$, tay quay O_1B thẳng hàng với thanh O_1O . Cho $OA = O_1B = \frac{1}{2}AB$, vận tốc góc của OA là $\omega = 3(s^{-1})$.



6) Bài tập 6

Vòng tròn O_2 có bán kính $r_2 = 9(cm)$ lăn không trượt trong vòng tròn cố định O_1 có bán kính $r_1 = 18(cm)$. Vòng tròn động O_2 gắn bản lề với thanh truyền AB chuyển động trong rãnh K.

Hãy xác định vận tốc của thanh AB khi $\varphi = 45^\circ$ nếu tay quay O_1O_2 thực hiện chuyển động quay quanh O_1 với vận tốc góc $n = 180 \left(\frac{vg}{ph} \right)$.

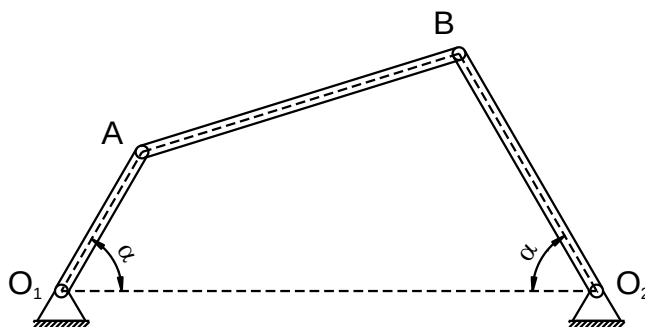


7) Bài tập 7

Cho cơ cấu 4 khâu bản lề phẳng O_1ABO_2 có tay quay O_1A quay đều quanh O_1 với vận tốc góc $\omega_0 = 6 \left(\frac{rad}{s} \right)$. Hãy:

- Xác định tâm vận tốc tức thời của thanh AB.
- Vận tốc góc các thanh AB và O_2B .

Biết: Tại thời điểm khảo sát, các thanh O_1A, O_2B làm với O_1O_2 các góc $\alpha = 60^\circ$; $O_1A = 10(cm)$; $O_2B = 30(cm)$; $O_1O_2 = 50(cm)$.



PHẦN III: ĐỘNG LỰC HỌC

MỞ ĐẦU

Như ta đã biết tĩnh học chỉ nghiên cứu các quy luật cân bằng của vật rắn dưới tác dụng của lực, còn động học chỉ nghiên cứu chuyển động của vật thể về mặt hình học mà không quan tâm đến yếu tố lực. Động lực học là phần tổng quát nhất của Cơ lý thuyết nghiên cứu các quy luật chuyển động cơ học của vật thể dưới tác dụng của lực.

Dựa trên hệ tiên đề do Niu-ton và Galile đưa ra, động lực học thiết lập mối liên hệ có tính chất quy luật giữa hai đại lượng: Các đại lượng đặc trưng cho chuyển động của vật rắn và các đại lượng đặc trưng cho sự tác động của các lực lên vật rắn ấy. Các mối liên hệ giữa lực và chuyển động được biểu diễn dưới dạng các phương trình vi phân chuyển động, các định lý tổng quát và các nguyên lý cơ học.

Đối tượng nghiên cứu trong động lực học được đưa ra theo hai dạng mô hình: Động lực học chất điểm và động lực học cơ hệ.

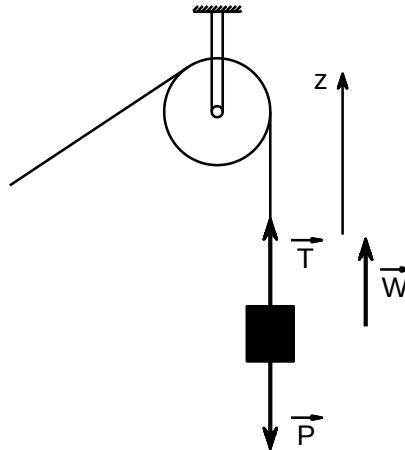
Chương 7

ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM

A. VÍ DỤ

1) Ví dụ 1 – Bài toán thuận

Người ta kéo một vật nặng có trọng lượng P đi lên nhanh dần với gia tốc W . Hãy xác định sức căng dây, bỏ qua ma sát tại ròng rọc.



Bài giải

- Coi vật nặng có trọng lượng P là một chất điểm.
- Các lực tác dụng lên vật nặng gồm: Trọng lực $\vec{P}$, sức căng dây $\vec{T}$
- Viết phương trình cơ bản của động lực học cho vật nặng ta có:

$$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{T}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P}{g}\vec{W} = \vec{P} + \vec{T} (*)$$

- Chiều hai vế của phương trình (*) lên trục z ta được:

$$\frac{P}{g}W = T - P$$

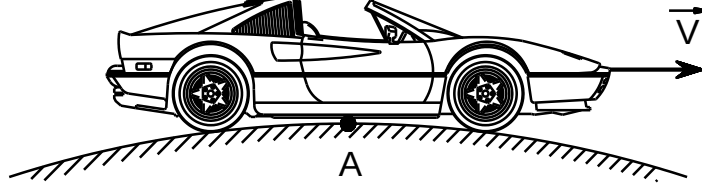
$$\Rightarrow T = P\left(1 + \frac{W}{g}\right)$$

- Nhận xét:

- + Nếu vật đi lên nhanh dần hay đi xuống chậm dần thì $W > 0 \Rightarrow T = P\left(1 + \frac{W}{g}\right)$
- + Nếu vật đi lên chậm dần hay đi xuống nhanh dần thì $W < 0 \Rightarrow T = P\left(1 - \frac{W}{g}\right)$
- + Nếu vật đứng yên hay chuyển động thẳng đều thì $W = 0 \Rightarrow T = P$

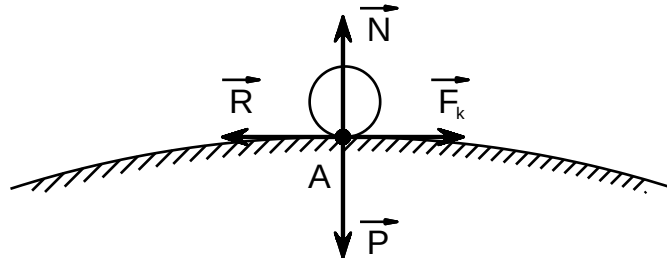
2) Ví dụ 2

Tìm áp lực của ô tô lên đỉnh cầu tại A. Biết ô tô có trọng lượng $P = 10(T)$, chuyển động với vận tốc $V = 10\left(\frac{m}{s}\right)$, bán kính cong của cầu tại A là $\rho = 50(m)$.



Bài giải

- Coi ô tô như một chất điểm.



- Các lực tác dụng lên ô tô bao gồm: Trọng lực $\vec{P}$, phản lực $\vec{N}$, lực kéo $\vec{F}_k$, lực cản $\vec{R}$ có phương, chiều như hình vẽ.

- Ta có phương trình cơ bản động lực học cho ô tô:

$$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{R} + \vec{F}_k$$

- Để tìm phản lực $\vec{N}$ ta chiếu phương trình trên lên phương pháp tuyến của quỹ đạo tại A:

$$mW_n = P - N \Leftrightarrow N = P - mW_n = P - m \frac{V^2}{\rho} = P - \frac{P}{g} \frac{V^2}{\rho}$$

$$\Rightarrow N = P \left(1 - \frac{V^2}{g\rho} \right)$$

- Như vậy, áp lực của ô tô lên cầu $\vec{N}'$ có cùng phương, ngược chiều với $\vec{N}$ và có trị số:

$$N' = N = P \left(1 - \frac{V^2}{g\rho} \right) \approx 8(T)$$

- **Nhận xét:** Áp lực của ô tô lên cầu phụ thuộc vào vận tốc chuyển động của xe và có trị số nhỏ hơn trọng lượng bản thân xe.

3) Ví dụ 3 – Bài toán nghịch

Một quả cầu khối lượng m rơi tự do không vận tốc ban đầu từ điểm O dưới tác dụng của trọng lực $\vec{P}$. Xác định chuyển động của quả cầu.

Bài giải

- Khảo sát chuyển động của quả cầu, coi quả cầu như một chất điểm
- Các điều kiện ban đầu: Tại thời điểm ban đầu $t=0$ thì $z=0$ và $V=0$
- Viết phương trình cơ bản động lực học cho quả cầu ta có:

$$\vec{P} = m\vec{W} = \frac{P}{g}\vec{W}$$

- Chiếu phương trình trên lên trục z ta có:

$$P = \frac{P}{g}W \Leftrightarrow W = g$$

- Hay:

$$\begin{aligned} W &= \frac{dV}{dt} = g \\ \Leftrightarrow dV &= gdt \\ \Leftrightarrow \int dV &= \int gdt \\ \Rightarrow V &= g.t + C_1 (*) \end{aligned}$$

- Mặt khác:

$$\begin{aligned} V &= \frac{dz}{dt} \Rightarrow dz = Vdt = (g.t + C_1)dt \\ \Leftrightarrow \int dz &= \int (g.t + C_1)dt \\ \Rightarrow z &= \frac{g.t^2}{2} + C_1.t + C_2 (**) \end{aligned}$$

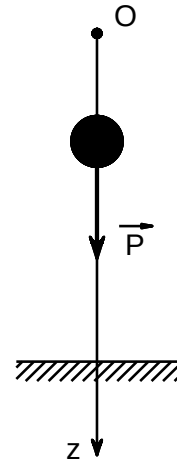
- Tại thời điểm $t=0$ thì $V=0$ và $z=0$. Thay vào phương trình (*) và (**) ta có $C_1=0, C_2=0$

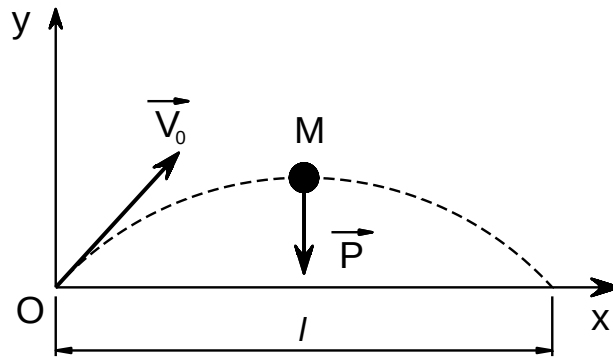
- Vậy phương trình chuyển động của quả cầu là:

$$z = \frac{g.t^2}{2} \text{ với vận tốc } V = g.t$$

4) Ví dụ 4

Một vật được ném lên trong mặt phẳng thẳng đứng nghiêng góc α so với phương nằm ngang với vận tốc ban đầu $\vec{V}_0$. Xác định phương trình quỹ đạo của vật, bỏ qua ma sát.





Bài giải

- Khảo sát chuyển động của vật M, coi M như là một chất điểm
- Lực tác dụng lên chất điểm: Trọng lực $\vec{P}$
- Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ có gốc O trùng với vị trí ban đầu của điểm M
- Các điều kiện ban đầu khi $t = t_0 = 0$ thì:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \dot{x} = V_{0x} = V_0 \cos \alpha \\ \dot{y} = V_{0y} = V_0 \sin \alpha \end{cases}$$

- Phương trình vi phân của chất điểm M viết trong hệ tọa độ Đề-các

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} (*)$$

- Lần lượt tích phân hệ (*) ta có:

$$\begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = -gt + C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 t + C_2 \\ y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4 \end{cases} (**)$$

- Từ điều kiện ban đầu ta có:

$$\begin{cases} C_1 = V_0 \cos \alpha \\ C_2 = 0 \\ C_3 = V_0 \sin \alpha \\ C_4 = 0 \end{cases}$$

- Thay các giá trị trên vào (**) ta được phương trình chuyển động của điểm dưới dạng Đề-các:

$$\begin{cases} x = V_0 t \cos \alpha \\ y = -\frac{gt^2}{2} + V_0 t \sin \alpha \end{cases}$$

- Khi t trong (***) ta có phương trình quỹ đạo chuyển động của điểm:

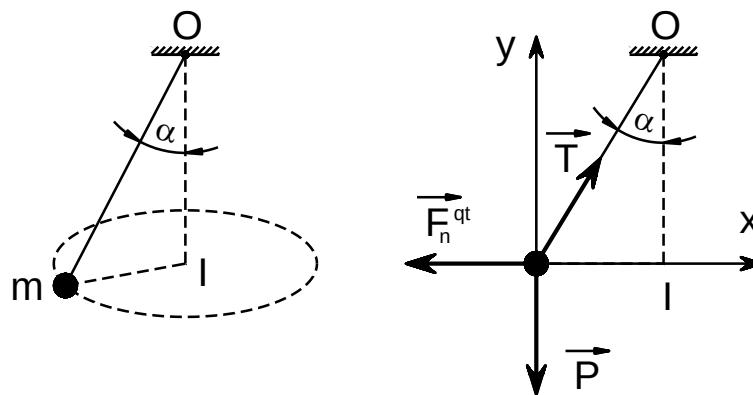
$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

- Vậy quỹ đạo của chất điểm M có dạng Parabol.

5) Ví dụ 5 – Nguyên lý Đa-lăm-be

Một quả cầu khối lượng $m = 1(\text{kg})$ được treo vào điểm cố định O nhờ sợi dây dài $l = 30(\text{cm})$. Quả cầu chuyển động đều vạch nên một đường tròn trong mặt phẳng ngang như hình vẽ.

Tìm vận tốc của quả cầu và sức căng dây, biết dây làm với phương thẳng đứng góc $\alpha = 60^\circ$.



Bài giải

- Coi quả cầu là một chất điểm chuyển động dưới tác dụng của các lực: Trọng lực $\vec{P}$, sức căng dây $\vec{T}$.
- Đặt vào quả cầu lực quán tính pháp tuyến $\vec{F}_n^{qt}$ (vì quả cầu chuyển động tròn đều nên $\vec{F}_\tau^{qt} = 0$).
- Áp dụng nguyên lý Đa-lăm-be ta có:

$$(\vec{P}, \vec{T}, \vec{F}_n^{qt}) \sim 0 \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_n^{qt} = 0$$

- Chiếu phương trình trên lên hai trục tọa độ x, y ta có:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 F_{ix} = T \sin \alpha - F_n^{qt} = 0 \\ \sum_{i=1}^3 F_{iy} = T \cos \alpha - P = 0 \end{cases}$$

- Thay $F_n^{qt} = m \frac{V^2}{R}$ vào hệ phương trình trên và giải ta được $V = 2,1 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$

B. BÀI TẬP ỨNG DỤNG

1) Bài tập 1

Cho chất điểm có khối lượng m chuyển động theo phương trình

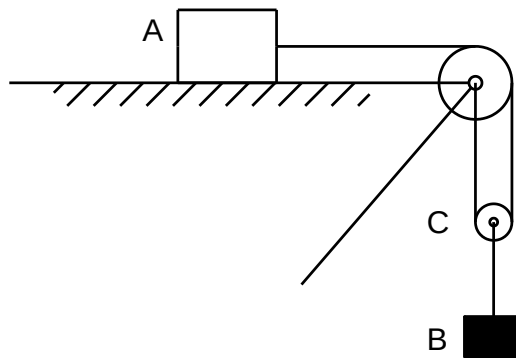
$$\begin{cases} x = a \cos kt \\ y = b \sin kt \end{cases}$$

Trong đó: a, b, k là các hằng số; x, y tính bằng mét (m); t tính bằng giây (s)

Xác định lực $\vec{F}$ tác dụng lên chất điểm đó

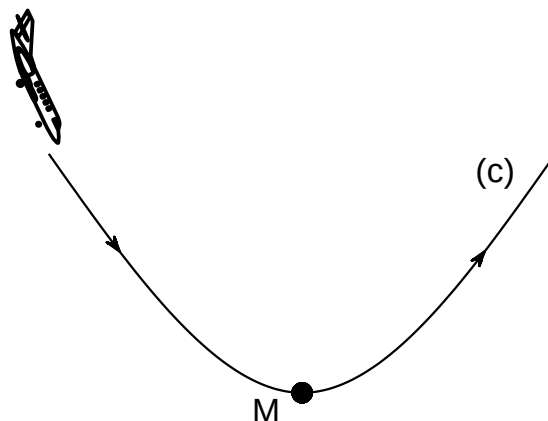
2) Bài tập 2

Vật A có khối lượng $m_A = 100(kg)$ đặt trên nền nhẵn. Vật B có khối lượng $m_B = 300(kg)$. Bỏ qua khối lượng và ma sát của ròng rọc. Hãy xác định lực căng trong mỗi nhánh dây?



3) Bài tập 3

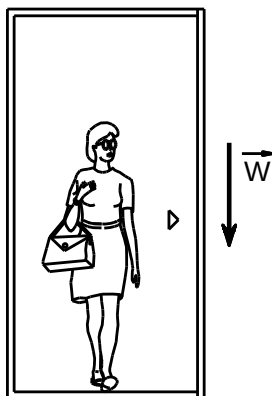
Một máy bay bổ nhào trong mặt phẳng thẳng đứng rồi lái ngoặt lên. Ở điểm thấp nhất của quỹ đạo, máy bay có vận tốc $v = 1000(km/h)$ và bán kính cong của quỹ đạo $\rho = 600(m)$. Khối lượng của phi công là $m = 80(kg)$. Tìm áp lực pháp tuyến do người tác dụng lên ghế ngồi ở vị trí thấp nhất đó?



4) Bài tập 4

Một người có trọng lượng P đứng trong cabin thang máy. Thang máy chuyển động xuống dưới với gia tốc $W = \alpha \cdot g$ ($0 < \alpha < 1$; g – gia tốc trọng trường).

Xác định áp lực của người lên sàn cabin và gia tốc của thang máy sao cho người ở trạng thái không trọng lượng.



5) Bài tập 5

Một máy bay ở độ cao $h = 4000(m)$ so với mặt đất và với tốc độ ngang $V = 500(km/h)$. Muốn thả một vật rơi đúng vị trí B trên mặt đất, máy bay cần phải thả nó cách B một khoảng cách x bằng bao nhiêu? Bỏ qua sức cản không khí và coi trái đất đứng yên.

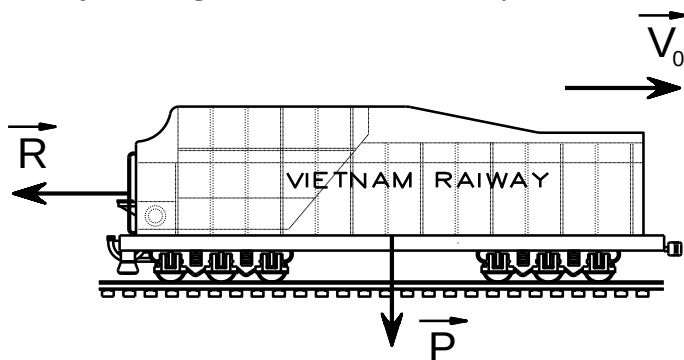
6) Bài tập 6

Một viên đạn có tầm đi xa nhất là L . Xác định độ xa l và độ cao h khi viên đạn được bắn đi dưới một góc $\alpha = 30^\circ$ so với phương nằm ngang. Bỏ qua sức cản không khí.

7) Bài tập 7

Một đoàn tàu có trọng lượng P chuyển động trên một đoạn đường thẳng nằm ngang với vận tốc không đổi $\vec{V}_0$. Vào một lúc nào đó ta tắt máy hãm tàu lại. Gọi lực hãm và lực cản tổng hợp của tàu là $\vec{R}$ có trị số bằng $\frac{1}{10}$ trọng lượng của nó.

Hãy xác định chuyển động của tàu từ khi tắt máy và hãm.



8) Bài tập 8

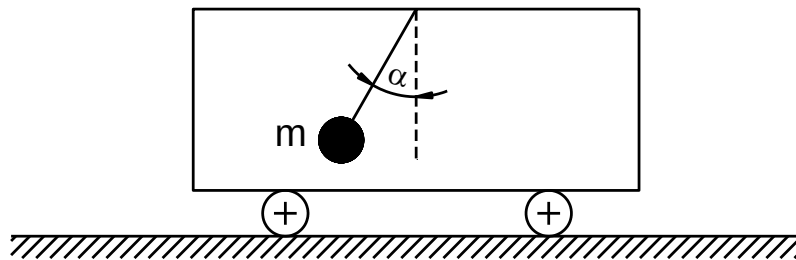
Một vật có trọng lượng P bắt đầu chuyển động từ trạng thái đứng yên trên đường thẳng nhẵn nằm ngang dưới tác dụng của lực $\vec{F}$. Lực $\vec{F}$ có giá trị tỷ lệ với thời gian theo luật $F = kt$ (với k là hằng số).

Tìm quy luật chuyển động của vật trên?

9) Bài tập 9

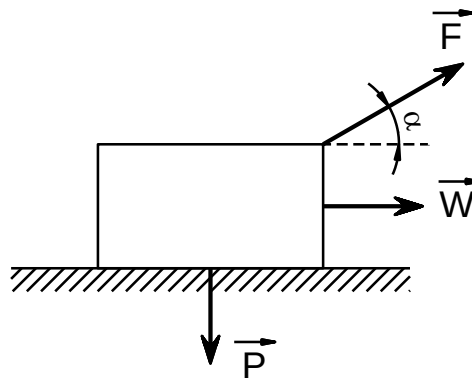
Một quả cầu có khối lượng $m = 8(kg)$ được treo trên trần của một toa tàu lập với phương thẳng đứng góc $\alpha = 30^0$ khi tàu chuyển động nhanh dần đều.

Tìm gia tốc của tàu và sức căng dây treo?



10) Bài tập 10

Một vật có trọng lượng $P = 10(kN)$ chuyển động thẳng theo mặt phẳng ngang với gia tốc $\vec{W}$ dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ tạo với phương ngang góc $\alpha = 30^0$. Xác định trị số lực $\vec{F}$ nếu hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng ngang là f .



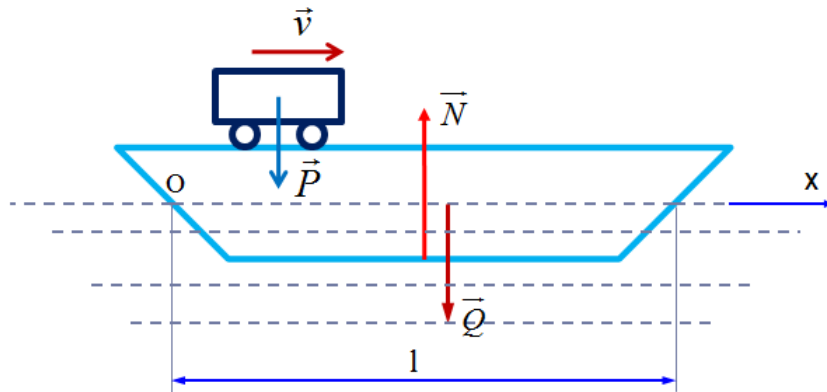
Chương 08

CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

A. VÍ DỤ

1) Ví dụ 1 – Định lý chuyển động khối tâm

Một chiếc ô tô có trọng lượng P chuyển động từ đầu phà đến cuối phà. Phà có trọng lượng Q và chiều dài l . Bỏ qua lực cản ngang của nước. Tính dịch chuyển của phà trong chuyển động đó. Lúc đầu phà đứng yên.



Bài giải

Khảo sát cơ hệ gồm ô tô và phà. Các ngoại lực tác dụng lên hệ và $\vec{P}, \vec{Q}$ lực đẩy thẳng đứng Acsimet $\vec{N}$. Chọn trục x nằm ngang hướng từ trái sang phải.

Áp dụng định lý chuyển động khối tâm, ta có:

$$M \vec{a}_c = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{N}$$

Trong đó M là khối lượng cơ hệ $M = \frac{P+Q}{g}$; $\vec{a}_c$ là gia tốc khối tâm của cơ hệ.

Nhận xét rằng tất cả các lực tác dụng lên cơ hệ đều thẳng góc với trục x tức $\sum X_k^e = 0$ và vì ban đầu khối tâm của cơ hệ đứng yên (do cả cơ hệ đứng yên) nên dựa vào tính chất bảo toàn chuyển động của hình chiếu khối tâm cơ hệ dọc trục x , ta có: $x_C = \text{const}$, đặc biệt:

$$x_{(C)}^{(0)} = x_{(C)}^{(1)} \quad (1)$$

Trong đó: $x_{(C)}^{(0)}$ là hoành độ khối tâm cơ hệ ứng với thời điểm đầu (khi ô tô đứng ở đầu phà); $x_{(C)}^{(1)}$ là hoành độ khối tâm cơ hệ khi ô tô đã di chuyển đến cuối phà.

Ta chọn gốc tọa độ O là vị trí cuối về bên trái phà lúc bắt đầu chuyển động. Áp dụng định nghĩa khối tâm ta tính được vị trí của khối tâm C lúc bắt đầu chuyển động:

$$x_{(C)}^{(0)} = \frac{\frac{P}{g} \cdot 0 + \frac{Q}{g} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{P}{g} + \frac{Q}{g}} = \frac{Ql}{2(P+Q)} \quad (2)$$

Gọi Δ là đoạn dịch chuyển của phà khi ô tô đi được đến cuối phà, ta có vị trí khối tâm lúc đó:

$$x_{(C)}^{(1)} = \frac{\frac{P}{g} \cdot (1-V) + \frac{Q}{g} \cdot (\frac{1}{2} - V)}{\frac{P}{g} + \frac{Q}{g}} = \frac{P(1-V) + Q(\frac{1}{2} - V)}{(P+Q)} \quad (3)$$

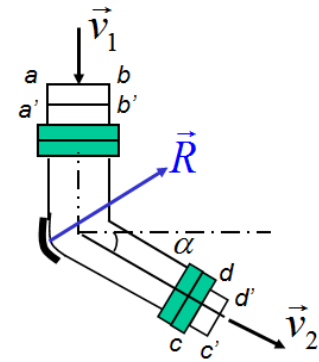
Từ (1), (2) và (3) ta có:

$$\Delta = \frac{Pl}{P+Q}$$

2) Ví dụ 2 – Định luật bảo toàn động lượng

Một dòng chất lỏng lý tưởng đồng nhất không nén được chảy qua ống dẫn có khuỷu đổi hướng với góc α . Lưu lượng khối của dòng chảy là m (kg/s). Cho biết vận tốc ở tiết diện vào và ra tương ứng là v_1, v_2 .

Tính áp lực của ống lên gối đỡ, bỏ qua trọng lực chất lỏng và các áp suất thủy tĩnh.



Bài giải

Khảo sát cơ hệ là khối chất lỏng abcd. Ngoại lực tác dụng lên cơ hệ là áp lực $\vec{R}$ của gối đỡ lên ống dòng.

Chú ý rằng lực tác dụng lên ổ đỡ ngược chiều và có cùng giá trị với lực $\vec{R}$.

Áp dụng định lý biến thiên động lượng ta có:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}$$

Đầu tiên ta tính lượng biến thiên động lượng $\Delta\vec{Q}$ trong khoảng thời gian Δt , trong khoảng thời gian đó khối lỏng abcd chuyển đến vị trí a'b'c'd'.

$$\Delta\vec{Q} = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1$$

Trong đó $\vec{Q}_1$ là động lượng khối lỏng tại thời điểm t , tức động lượng của khối lỏng abcd nó bằng tổng động lượng của hai khối lỏng aba'b' và a'b'cd, còn $\vec{Q}_2$ là

động lượng của khối lỏng a'b'c'd' tại thời điểm $t + \Delta t$, nó là tổng động lượng của hai khối lỏng a'b'cd và cdc'd'.

Do giả thiết chất lỏng lý tưởng, đồng chất và không nén được, ta có:

$$\Delta \vec{Q} = \vec{Q}'_2 - \vec{Q}'_1$$

Trong đó $\vec{Q}'_1$ là động lượng của khối lỏng aba'b' và $\vec{Q}'_2$ là động lượng của khối lỏng cdc'd'.

$$\vec{Q}'_1 = M \vec{v}_{C1} \Delta t ;$$

$$\vec{Q}'_2 = M \vec{v}_{C2} \Delta t$$

Trong đó $\vec{v}_{C1}, \vec{v}_{C2}$ là vận tốc khối tâm của các khối lỏng aba'b' và cdc'd'.

Vậy:
$$\Delta \vec{Q} = \vec{Q}'_2 - \vec{Q}'_1 = M (\vec{v}_{C2} - \vec{v}_{C1}) \Delta t$$

Và:
$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = L \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta t} = M \cdot L \lim_{t \rightarrow 0} (\vec{V}_{C2} - \vec{V}_{C1}) = M (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

Từ đó ta nhận được:

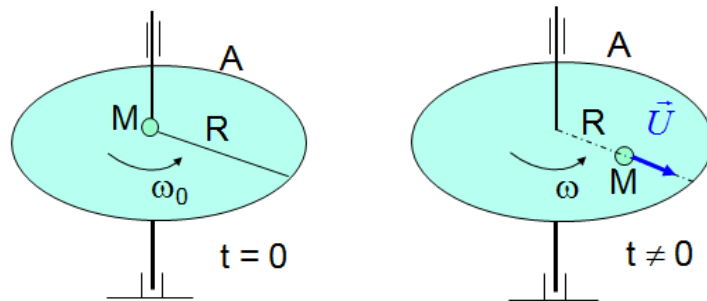
$$\vec{R} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = M (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

Các thành phần của phản lực trên các trục tọa độ Ox và Oy sẽ bằng:

$$R_x = Mv_2 \cos \alpha; \quad R_y = (Mv_2 \sin \alpha - v_1)$$

3) Ví dụ 3 – Định lý biến thiên mômen động lượng

Một đĩa tròn A đồng chất có trọng lượng P, bán kính R quay được quanh trục thẳng đứng vuông góc và đi qua tâm của đĩa. Tại thời điểm ban đầu, tâm đĩa có viên bi M trọng lượng Q, đĩa A có vận tốc góc ω_0 . Sau đó viên bi bắt đầu chuyển động dọc theo đường bán kính của đĩa với vận tốc tương đối U không đổi. Tìm vận tốc góc của đĩa tại thời điểm bất kì sau khi viên bi rời khỏi tâm đĩa.

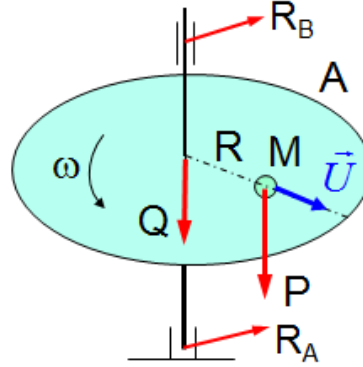


Bài giải

Khảo sát cơ hệ gồm đĩa và chất điểm M. Đĩa có thể quay quanh trục cố định z thẳng đứng, còn chất điểm M chuyển động trên mặt đĩa theo đường tròn tâm O, bán

kính OM (chuyển động tương đối) với vận tốc u và cùng với đĩa quay quanh trục z (chuyển động theo).

Các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ gồm các trọng lực $\vec{Q}$, $\vec{P}$ và các phản lực $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ tại các ổ trục A và B.



Vì hệ ngoại lực gồm các lực song song hoặc cắt trục z nên:

$$\sum \overline{m_z}(\vec{F}_{ek}) = 0$$

Khi áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng đối với trục z ta có:

$$\frac{d\overline{L_z}}{dt} = \sum \overline{m_z}(\vec{F}_{ek}) = 0$$

Từ đó rút ra:

$$\overline{L_z} = \text{const} = \overline{L_z}(0) \quad (1)$$

tức là mô men động lượng của cơ hệ tại mọi thời điểm đều bằng giá trị của nó tại thời điểm ban đầu.

Giả sử tại thời điểm đầu chất điểm nằm yên trên đĩa và cùng với đĩa quay quanh trục z theo chiều dương với vận tốc góc ω_0 và khi chất điểm chuyển động đối với đĩa với vận tốc u (theo chiều dương quanh trục z) thì đĩa sẽ quay quanh trục z với vận tốc góc ω cùng theo chiều dương. Mômen động lượng của cơ hệ bằng:

$$\overline{L_z} = \overline{L_z}^{(1)} + \overline{L_z}^{(2)}$$

Trong đó lần lượt là mômen động lượng của đĩa và chất điểm M đối với trục z :

$$\overline{L_z}^{(1)} = J_z \overline{\omega} = \frac{Q}{2g} R^2 \omega; \quad \overline{L_z}^{(2)} = \frac{P}{g} (\omega R + u) R$$

Vậy:

$$\overline{L_z} = \frac{Q}{2g} R^2 \omega + \frac{P}{g} (\omega R + u) R = \frac{R^2 \omega (Q + 2P) + 2PRu}{2g} \quad (2)$$

$$\overline{L_z}^{(0)} = \frac{R^2 \omega_0 (Q + 2P)}{2g} \quad (3)$$

Khi thay (2) và (3) vào (1) ta có:

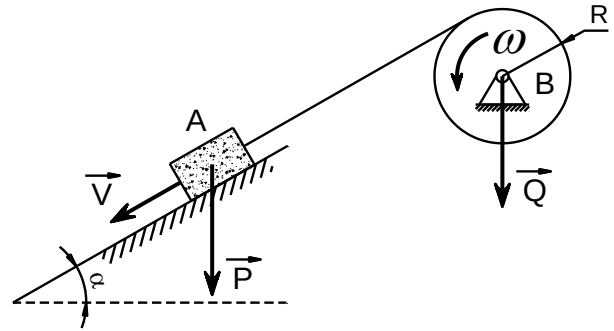
$$\omega = \omega_0 - \frac{2Pu}{(Q + 2P)R}$$

Đĩa quay quanh trục z theo chiều dương hoặc âm tùy thuộc:

$$\omega_0 - \frac{2Pu}{(Q + 2P)R} > 0$$

4) Ví dụ 4 – Định lý biến thiên động năng

Tải trọng A trọng lượng P trượt theo mặt nghiêng xuống dưới với vận tốc $\vec{V}$ làm quay trống B trọng lượng Q nhờ sợi dây mềm quấn quanh nó. Tính động năng của hệ biểu thị qua vận tốc $\vec{V}$ của tải trọng A. Coi trống như hình trụ tròn đồng chất và bỏ qua trọng lượng dây.



Bài giải

• Hệ để tính động năng bao gồm: Tải trọng A, trống B và dây mềm. Vì bỏ qua trọng lượng dây nên động năng của dây bằng không. Ta có:

$$T = T_A + T_B$$

• Động năng của A chuyển động tịnh tiến tính theo công thức:

$$T_A = \frac{1}{2} m_A V_A^2 = \frac{1}{2} \times \frac{P}{g} V^2$$

• Động năng của trống B quay quanh trục cố định tính theo công thức:

$$T_B = \frac{1}{2} J_z \omega^2 = \frac{1}{2} \times \frac{m_B}{2} R^2 \times \omega^2 = \frac{1}{2} \times \frac{Q}{2g} R^2 \times \left(\frac{V}{R} \right)^2 = \frac{1}{4} \frac{Q}{g} V^2$$

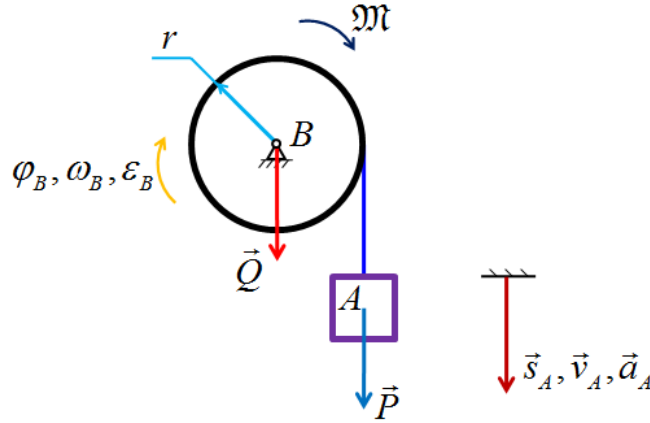
• Vậy động năng của cả cơ hệ là:

$$T = T_A + T_B = \frac{1}{2} \times \frac{P}{g} V^2 + \frac{1}{4} \frac{Q}{g} V^2 = \frac{2P + Q}{4g} V^2$$

5) Ví dụ 5 – Định lý biến thiên động năng

Một vật A có trọng lượng P được kéo lên từ trạng thái đứng yên nhờ tời B là đĩa tròn đồng chất có bán kính R , trọng lượng Q và chịu tác dụng ngẫu lực có mômen M không đổi.

- Tìm vận tốc vật A khi nó được kéo lên một đoạn bằng h;
- Tìm gia tốc vật A.



Bài giải

Cơ hệ khảo sát gồm vật A chuyển động tịnh tiến; tời B quay quanh một trục cố định. Tời B quay quanh một trục cố định. Cơ hệ có một bậc tự do. Các lực tác dụng lên cơ hệ gồm các trọng lực $\vec{P}, \vec{Q}$, ngẫu lực M, phản lực $\vec{R}_O$ và các nội lực.

Nhận xét: Trong hệ lực tác dụng chỉ có ngẫu lực M và trọng lực $\vec{P}$ sinh công nên để tìm vận tốc $\vec{V}_A$ của vật A ta áp dụng định lý biến thiên động năng dạng:

$$T - T_0 = A(\vec{P}) + A(\vec{M}) \quad (a)$$

Trong đó T_0 là động năng cơ hệ tại thời điểm đầu ($T_0 = 0$, vì ban đầu cơ hệ đứng yên) còn T là động năng cơ hệ:

$$T = T_A + T_B$$

Vật A chuyển động tịnh tiến nên $T_A = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v_A^2$

Vật B quay quanh trục cố định nên $T_B = \frac{1}{2} J_O \omega^2$, trong đó J_O là mômen quán tính của vật B đối với trục cố định thẳng góc với mặt phẳng hình vẽ và qua O:

$$J_O = \frac{1}{2} \frac{P}{g} R^2$$

Mặt khác ta có:

$$\omega = \frac{v_A}{R}$$

Vậy động năng cơ hệ bằng:

$$T = \frac{(2P + Q)}{2g} \frac{v_A^2}{2} \quad (b)$$

Gọi $\sum A_K$ là tổng công của các lực, ta có:

$$\sum A_k = A(\overline{M}) + A(\overline{P}) = M\varphi - Ph$$

Trong đó: φ là góc quay của tời khi vật A được nâng một đoạn h . Dễ dàng nhận được:

$$h = R\varphi$$

Vậy:

$$\sum A_k = M\varphi - Ph = \left(\frac{M}{R} - P\right)h \quad (c)$$

Thay (b) và (c) vào (a) ta nhận được:

$$\frac{(2P + Q)}{2g} \frac{v_A^2}{2} = \left(\frac{M}{R} - P\right)h$$

Suy ra:

$$V_A = \sqrt{4g \frac{(M - PR)}{R(2P + Q)} h}$$

Để tìm gia tốc $\overline{W}_A$ của vật A ta sử dụng định lý biến thiên động năng dưới dạng sau:

$$\frac{(2P + Q)}{2g} \cdot V_A \cdot W_A = \left(\frac{M}{R} - P\right) \cdot V_A$$

Vì cơ hệ chuyển động nên $V_A \neq 0$, nên sau khi rút gọn cho V_A ở hai vế, ta được:

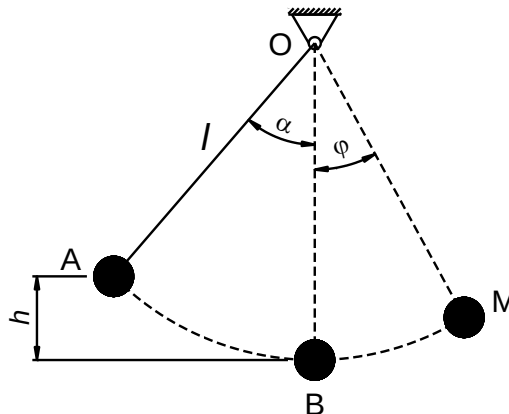
$$W_A = 2g \cdot \frac{M - PR}{R(2P + Q)} = \text{const}$$

Như vậy vật A chuyển động biến đổi đều.

6) Ví dụ 6 – Định luật bảo toàn cơ năng

Một con lắc đơn có khối lượng m treo ở điểm O nhờ sợi dây có chiều dài $OA = l$. Người ta kéo con lắc khỏi vị trí cân bằng một góc α rồi thả ra để nó tự dao động. Bỏ qua sức cản của không khí.

Hãy tìm động năng, thế năng của con lắc ở vị trí cao nhất và thấp nhất so với vị trí cân bằng (tính theo m, l, α). Tính vận tốc của con lắc tại vị trí M ứng với góc $\varphi < \alpha$?



Bài giải

- Lấy điểm B để làm gốc tính thế năng
- Xét quả cầu ở vị trí cao nhất (A)
 - Động năng: $T_A = \frac{1}{2}mV_A^2 = 0$ (vì $V_A = 0$)
 - Thế năng: $\pi_A = mgh_A = mgh = mg(l - l \cos \alpha) = mgl(1 - \cos \alpha)$
 - Cơ năng: $E_A = T_A + \pi_A = mgl(1 - \cos \alpha)$
- Xét quả cầu tại vị trí thấp nhất (B)
 - Động năng: $T_B = \frac{1}{2}mV_B^2$
 - Thế năng: $V_B = mgh_B = 0$ (vì $h_B = 0$)
 - Cơ năng: $E_B = T_B + \pi_B = \frac{1}{2}mV_B^2$
- Xét quả cầu tại vị trí M bất kỳ ($\varphi < \alpha$)
 - Động năng: $T_M = \frac{1}{2}mV_M^2$
 - Thế năng: $V_M = mgh_M = mg(l - l \cos \varphi) = mgl(1 - \cos \varphi)$
 - Cơ năng: $E_M = T_M + \pi_M = \frac{1}{2}mV_M^2 + mgl(1 - \cos \varphi)$
- Theo định luật bảo toàn năng lượng ta có:

$$E_A = E_B = E_M$$

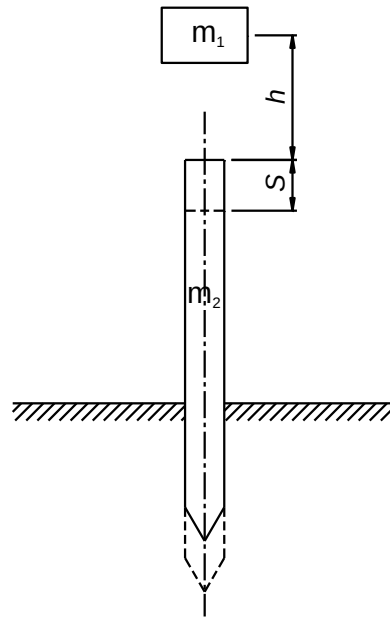
$$\Leftrightarrow mgl(1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2}mV_B^2 = \frac{1}{2}mV_M^2 + mgl(1 - \cos \varphi) (*)$$

- Từ phương trình (*) ta tính được:

$$V_M = \sqrt{2gl(\cos \varphi - \cos \alpha)}$$

7) Ví dụ 7 – Bài toán va chạm

Búa đóng cọc có khối lượng m_1 rơi tự do từ độ cao h so với đầu cọc. Khối lượng của cọc là m_2 . Sau một lần va đập, cọc đi xuống một đoạn S . Tìm lực cản trung bình của đất tác dụng lên cọc. Giả thiết là va chạm mềm ($k = 0$).



Bài giải

- Đây là bài toán va chạm thẳng xuyên tâm của hai vật chuyển động tịnh tiến.
- Hiện tượng va chạm xảy ra theo ba giai đoạn:
 - Giai đoạn 1: Kể từ khi búa rơi tự do từ độ cao h đến chạm vào đầu cọc với vận tốc V_1
 - Giai đoạn 2: Là quá trình va đập giữa búa và cọc kể từ lúc búa đập vào đầu cọc với vận tốc V_1 và cọc có vận tốc $V_2 = 0$ cho đến khi kết thúc quá trình va đập búa và cọc có cùng vận tốc u .
 - Giai đoạn 3: Kể từ khi búa và cọc có cùng vận tốc u cùng lún sâu một đoạn S rồi dừng lại.
- Trong giai đoạn 1: Xác định vận tốc V_1 của búa khi bắt đầu chạm vào đầu cọc nhờ định lý động năng.

$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 - 0 = m_1gh$$

$$\Rightarrow V_1 = \sqrt{2gh}$$

- Ta gọi F_{tb} là lực cản trung bình do nền đất tác dụng lên cọc và coi là hằng số. Áp dụng định lý động năng cho giai đoạn này:

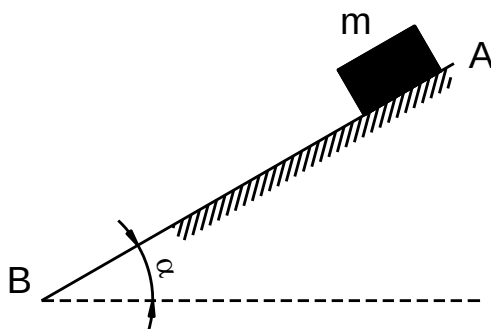
$$0 - \frac{m_1 + m_2}{2}u^2 = -\int_0^S F_{tb}dS = -F_{tb}.S$$

$$\Rightarrow F_{tb} = g \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \times \frac{h}{S}$$

B. BÀI TẬP ỨNG DỤNG

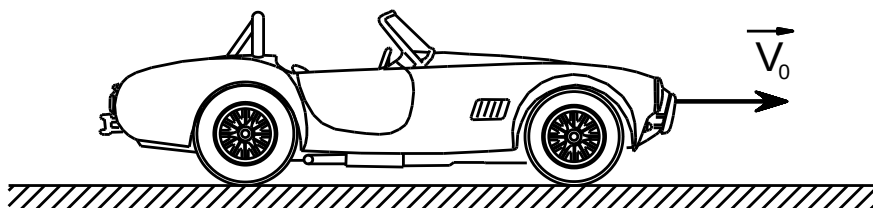
1) Bài tập 1

Một vật có khối lượng $m = 50(\text{kg})$ trượt xuống theo mặt phẳng AB dài $l = 3(\text{m})$ và nghiêng so với phương ngang góc $\alpha = 30^\circ$. Biết hệ số ma sát $f = 0,2$. Hãy tính công của các lực thực hiện trên đoạn đường đó?



2) Bài tập 2

Hệ số ma sát trượt giữa bánh xe ô tô và nền đường phải bằng bao nhiêu để ô tô đang có vận tốc $V_0 = 72(\text{km/h})$ dừng lại được sau khi bắt đầu hãm 6 giây. Nếu trọng lượng ô tô là P .



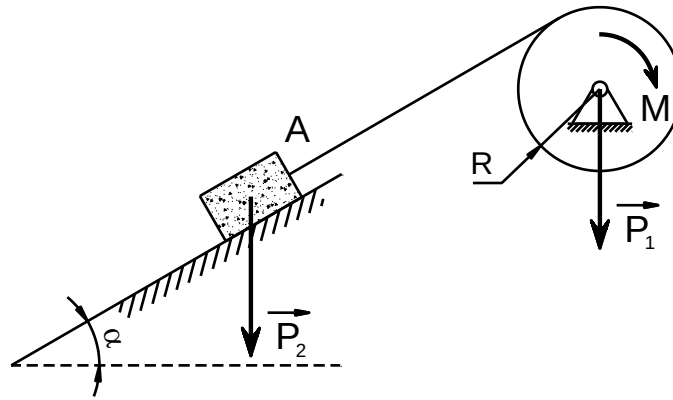
3) Bài tập 3

Đoàn tàu có trọng lượng $P = 400(\text{kN})$ đến chân dốc có độ dốc $i = \tan \alpha = 0,006$ (trong đó α là góc dốc) có vận tốc $V_0 = 54(\text{km/h})$. Hệ số ma sát khi tàu chuyển động $f = 0,005$. Sau khi tàu lên dốc được 50 giây thì vận tốc của nó giảm xuống còn $V_1 = 45(\text{km/h})$. Hãy xác định lực kéo F_k của đầu tàu?

4) Bài tập 4

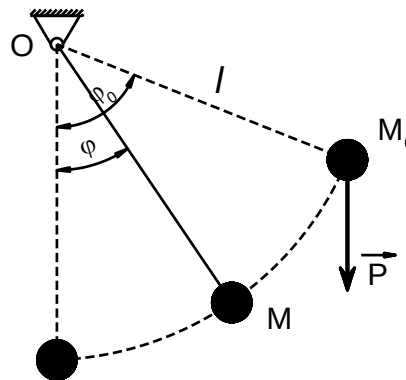
Mômen quay không đổi M tác dụng vào tang quay của tời có bán kính R , trọng lượng P_1 . Tải trọng P_2 buộc vào đầu A của sợi dây cuốn vào tang quay, nó được kéo lên theo mặt phẳng nghiêng với phương ngang góc α .

Tang quay của tời đạt được vận tốc góc bao nhiêu, sau khi nó quay được một góc φ . Hệ số ma sát trượt giữa tải trọng và mặt phẳng nghiêng là μ . Bỏ qua khối lượng dây và xem tang quay như là hình trụ tròn đồng chất. Lúc đầu hệ đứng yên.



5) Bài tập 5

Tải trọng có trọng lượng P được treo vào sợi dây dài l đặt lệch so với phương thẳng đứng góc φ_0 và rơi xuống không có vận tốc ban đầu. Xác định vận tốc của tải trọng ở thời điểm khi dây tạo với phương thẳng đứng góc φ ?

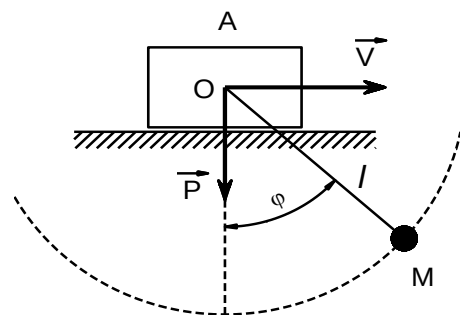


6) Bài tập 6

Năm 1751, một thiên thạch có trọng lượng $P = 39(N)$ rơi xuống mặt đất. Khi rơi nó lún sâu xuống mặt đất khoảng $l = 1,85(m)$. Quan sát người ta thấy rằng: Tại chỗ thiên thạch rơi nó chịu lực cản của đất là $F = 50(kN)$. Xác định vận tốc của thiên thạch khi nó rơi đến mặt đất (coi như nó không có vận tốc ban đầu). Tìm độ cao ban đầu của thiên thạch, coi lực trọng trường không đổi và bỏ qua sức cản không khí.

7) Bài tập 7

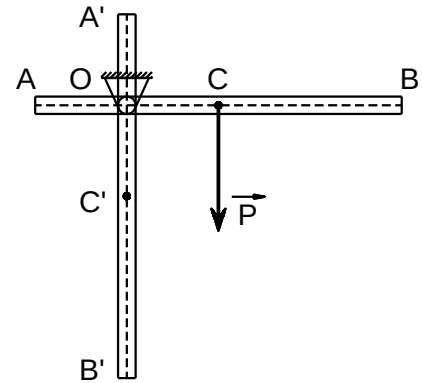
Con trượt A có trọng lượng P trượt theo mặt phẳng ngang với vận tốc $\vec{V}$. Quả cầu M nối bằng sợi dây mềm nhẹ, không giãn dài l buộc vào trục O của con trượt. Tính động năng của hệ. Giả sử quy luật chuyển động của con lắc OM là: $\varphi = \varphi(t)$



8) Bài tập 8

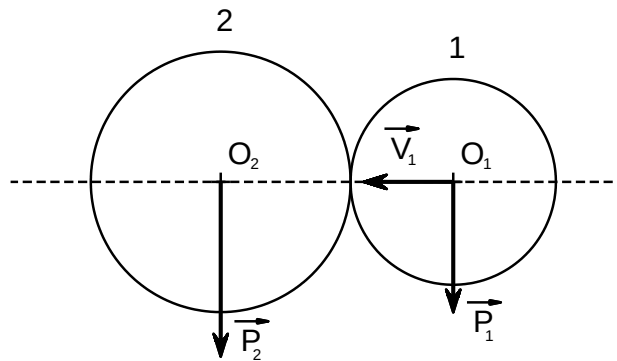
Thanh đồng chất $AB = l = 1,2(m)$ trọng lượng P có thể quay không ma sát quanh trục nằm ngang O cách đầu A một đoạn $OA = \frac{1}{4}l$. Thanh được giữ ở vị trí nằm ngang rồi sau đó thả cho chuyển động.

Xác định vận tốc đầu B khi thanh chuyển động đến vị trí thẳng đứng?



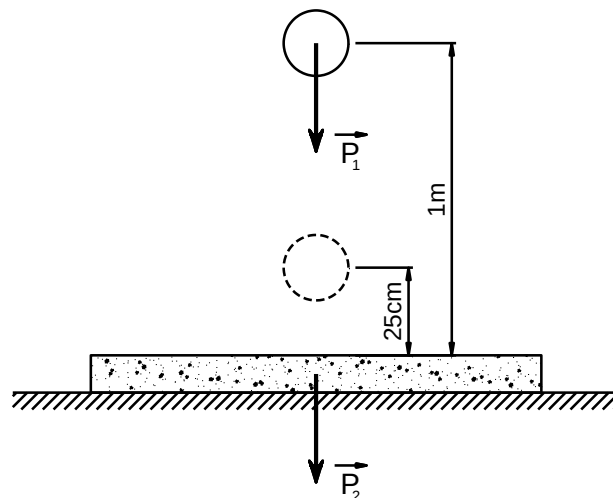
9) Bài tập 9

Quả cầu có trọng lượng $P_1 = 10(N)$ đập vào quả cầu có trọng lượng $P_2 = 20(N)$ đang đứng yên. Vận tốc của trọng tâm quả cầu 1 trước khi va chạm phải bằng bao nhiêu để sau khi va chạm không đàn hồi vận tốc của chúng đều bằng $6(m/s)$.



10) Bài tập 10

Quả cầu trọng lượng $P_1 = 2(N)$ rơi xuống từ độ cao $h_1 = 1(m)$ lên một tấm gỗ định có trọng lượng $P_2 = 20(N)$, nảy lên ở độ cao $h_2 = 25(cm)$. Tính lượng tiêu hao động năng khi va chạm?



TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Cơ học lý thuyết - ĐH Bách khoa Hà nội- 2004.
2. Cơ học lý thuyết - ĐH Bách khoa Hà nội- 2004.
3. Hướng dẫn giải bài tập Cơ học lý thuyết - ĐH Bách khoa Hà nội- 2003.
4. Giáo trình giản yếu Cơ học lý thuyết - X.M Tang - 1979 – Mascova.
5. Bài giảng Cơ học ứng dụng –Trường Cao đẳng KT- KT- CNI – 1996.